最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题

The Lastest Plane Geometry Questions in Mathematical Olympiads in The World

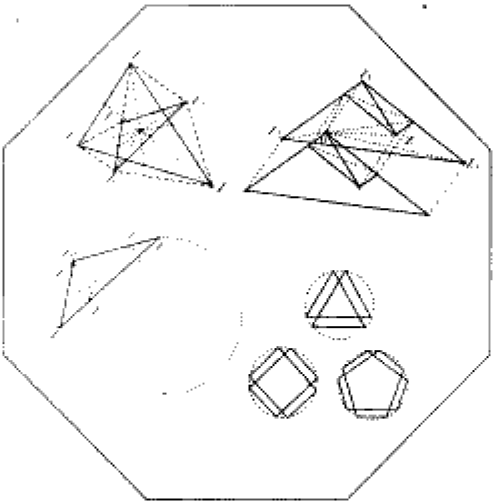
刘培杰 主 编
李志敏 副主编

哈爾濱工業大學出版社

最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题

The Lastest Plane Geometry Questions in Mathematical Olympiads in The World

刘培杰　主　编
李志敏　副主编



哈爾濱工業大學出版社

内容简介

本书精选了近年来国内外数学奥林匹克中的几何试题，并将其分为有关直线形的试题和有关圆的试题两部分，通过对真题的实践训练，可激发兴趣、启迪思维，提高参赛者的实战能力。本书适用于参加初高中数学奥林匹克竞赛的选手及教练员，也适用于平面几何爱好者。

图书在版编目(CIP)数据

最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题/刘培杰主编.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2007.1

ISBN 978-7-5603-2460-9

Ⅰ.最… Ⅱ.刘… Ⅲ.平面几何-习题 Ⅳ.O123.1-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2007)第004596号

策划编辑　刘培杰
责任编辑　李广鑫
封面设计　卞秉利
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街10号　邮编150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨工业大学印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张16　插页1　字数287千字
版　　次　2007年3月第1版　2007年3月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2460-9
印　　数　1~4 000册
定　　价　38.00元

（如因印装质量问题影响阅读，我社负责调换）

哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版图书目录

书　　名	出版时间	定　　价
平面几何证明方法全书	2005-09	35.00
平面几何证明方法全书习题解答	2005-09	25.00
500个最新世界著名数学智力趣题	2005-12	48.00
数学奥林匹克与数学文化（第一辑）	2006-05	48.00
历届IMO试题集（1959—2005）	2006-05	58.00
中考数学专题总复习	2006-08	28.00
新编中学数学解题方法全书（高中版）上卷	2006-10	38.00
新编中学数学解题方法全书（高中版）中卷	2006-10	48.00
从毕达哥拉斯到怀尔斯	2006-10	48.00
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释（上、下）	2006-12	68.00
中等数学英语阅读文选	2006-12	38.00
统计学专业英语	2007-03	28.00
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007-03	28.00
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007-03	38.00

联系地址：哈尔滨市南岗区复华四道街10号哈尔滨工业大学出版社

邮　　编：150006

联系电话：0451-86281378　　13904613167

E-mail：lpj1378@yahoo.com.cn

目录

第一章　有关直线形的试题 ········ 1

第二章　有关圆的试题 ········ 111

编辑手记 ········ 247

第一章　有关直线形的试题

①　设 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 $AB=c$，$BC=a$，$CA=b$．a，b，c 互不相等，AD，BE，CF 分别为 $\triangle ABC$ 的三条内角平分线，且 $DE=DF$．证明：

(1) $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$；

(2) $\angle BAC>90°$．

（2003 年中国女子数学奥林匹克）

证明　(1) 如图 1，由正弦定理得

$$\frac{\sin\angle AFD}{\sin\angle FAD}=\frac{AD}{FD}=\frac{AD}{ED}=\frac{\sin\angle AED}{\sin\angle DAE}$$

则
$$\sin\angle AFD=\sin\angle AED$$

故 $\angle AFD=\angle AED$，或 $\angle AFD+\angle AED=180°$．若 $\angle AFD=\angle AED$，则

$$\triangle ADF\cong\triangle ADE,AF=AE$$

于是
$$\triangle AIF\cong\triangle AIE,\angle AFI=\angle AEI$$

从而，$\triangle AFC\cong\triangle AEB$．故 $AC=AB$．矛盾．所以，$\angle AFD+\angle AED=180°$，$A$，$F$，$D$，$E$ 四点共圆．于是，$\angle DEC=\angle DFA>\angle ABC$．

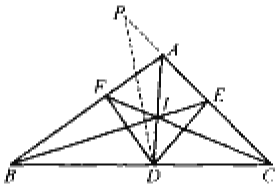


图 1

在 CA 的延长线上取一点 P，使得 $\angle DPC=\angle ABC$，则

$$PC=PE+CE \quad ①$$

由 $\angle BFD=\angle PED$，$FD=ED$，得 $\triangle BFD\cong\triangle PED$．故

$$PE=BF=\frac{ac}{a+b}$$

又 $\triangle PCD\backsim\triangle BCA$，则 $\dfrac{PC}{BC}=\dfrac{CD}{CA}$．于是

$$PC=a\cdot\frac{ba}{b+c}\cdot\frac{1}{b}=\frac{a^2}{b+c} \quad ②$$

$$CE=\frac{ab}{a+c} \quad ③$$

由 ①，②，③ 得
$$\frac{a^2}{b+c}=\frac{ac}{a+b}+\frac{ab}{c+a}$$

所以
$$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

(2) 由(1) 的结论有

$$a(a+b)(a+c)=b(b+a)(b+c)+c(c+a)(c+b)$$

$$a^2(a+b+c)=b^2(a+b+c)+c^2(a+b+c)+abc>$$

$$b^2(a+b+c)+c^2(a+b+c)$$

因为 $a^2 > b^2 + c^2$，所以 $\angle BAC > 90°$.

②证明：若凸四边形 $ABCD$ 内任意一点 P 到边 AB, BC, CD, DA 的距离之和为定值，则 $ABCD$ 是平行四边形.

（2003 年中国西部数学奥林匹克）

证明　如图 2，用记号 $d(P,l)$ 表示点 P 到直线 l 的距离. 先证一个引理：设 $\angle SAT = \alpha$ 是一个定角，则 $\angle SAT$ 内一动点 P 到两边 AS, AT 的距离之和为常数 m 的轨迹是线段 BC，其中 $AB = AC = \frac{m}{\sin\alpha}$. 若点 P 在 $\triangle ABC$ 内，则点 P 到两边 AS, AT 的距离之和小于 m；若点 P 在 $\triangle ABC$ 外，则点 P 到两边 AS, AT 的距离之和大于等于 m.

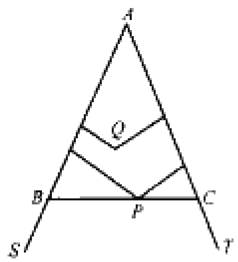


图 2

引理的证明：事实上，由 $S_{\triangle PAB} + S_{\triangle PAC} = S_{\triangle ABC}$，知

$$d(P,AB)+d(P,AC)=m$$

如图 2，若点 Q 在 $\triangle ABC$ 内，由 $S_{\triangle QAB} + S_{\triangle QAC} < S_{\triangle ABC}$，得

$$d(Q,AB)+d(Q,AC)<m$$

若点 Q 在 $\triangle ABC$ 外，$S_{\triangle QAB} + S_{\triangle QAC} > S_{\triangle ABC}$，得

$$d(Q,AB)+d(Q,AC)>m$$

下面回到原题.

1）若四边形 $ABCD$ 的两组对边都不平行，不妨设 BC 与 AD 相交于点 F，BA 与 CD 相交于点 E. 过点 P 分别作线段 l_1, l_2，使得 l_1 上的任意一点到 AB, CD 的距离之和为常数，l_2 上的任意一点到 BC, AD 的距离之和为常数，如图 3 所示. 则对于区域 S 内任意一点 Q，有

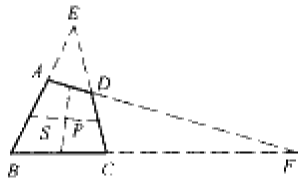


图 3

$$d(P,AB)+d(P,BC)+d(P,CD)+d(P,DA)=$$
$$d(Q,AB)+d(Q,BC)+d(Q,CD)+d(Q,DA)=$$
$$[d(Q,AB)+d(Q,CD)]+[d(Q,BC)+d(Q,DA)]>$$
$$[d(P,AB)+d(P,CD)]+[d(P,BC)+d(P,DA)]$$

矛盾.

2）若四边形 $ABCD$ 是梯形，也可推得矛盾.

③已知 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R. 若

$$\frac{a\cdot\cos\alpha+b\cdot\cos\beta+c\cdot\cos\gamma}{a\cdot\sin\beta+b\cdot\sin\gamma+c\cdot\sin\alpha}=\frac{a+b+c}{9R}$$

其中，a, b, c 为 $\triangle ABC$ 的三边长，α, β, γ 分别为 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的角度数，求 α, β, γ 的值.

（2002 ~ 2003 年匈牙利数学奥林匹克）

解　如图4，有

$$9R(a\cdot\cos\alpha+b\cdot\cos\beta+c\cdot\cos\gamma)=$$
$$18(S_{\triangle ABO}+S_{\triangle ACO}+S_{\triangle BCO})=18S_{\triangle ABC}$$

另一方面，由切比雪夫(Chebyshev)不等式有

$$(a+b+c)(a\cdot\sin\beta+b\cdot\sin\gamma+c\cdot\sin\alpha)\geqslant$$
$$3(ab\cdot\sin\gamma+bc\cdot\sin\alpha+ca\cdot\sin\beta)=18S_{\triangle ABC}$$

等号成立等价于

$$a:b:c=b\cdot\sin\gamma:c\cdot\sin\alpha:a\cdot\sin\beta$$

又因为　$ab\cdot\sin\gamma=ca\cdot\sin\beta=bc\cdot\sin\alpha$

所以 $a=b=c$，故 $\alpha=\beta=\gamma=60°$.

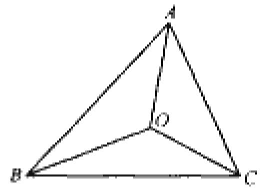


图4

④ 由小三角形 $H_1,H_2,\cdots,H_n$ 拼成三角形 H，它们的内切圆半径分别为 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 和 r，证明：$r\leqslant r_1+r_2+\cdots+r_n$.

(2002－2003年匈牙利数学奥林匹克)

证明　如图5，对任意一个小角形 $H_i(i=1,2,\cdots,n)$，它的半周长 p_i 小于等于 $\triangle ABC$ 的半周长 p，则由面积关系式

$$pr=S_{\triangle ABC}=S_{H_1}+S_{H_2}+\cdots+S_{H_n}=$$
$$p_1r_1+p_2r_2+\cdots+p_nr_n\leqslant p(r_1+r_2+\cdots+r_n)$$

就有　$r\leqslant r_1+r_2+\cdots+r_n$

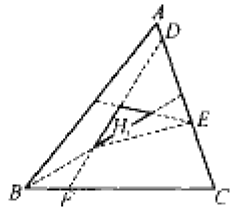


图5

⑤ 已知 $\triangle ABC$，由顶点 A 分别向 $\angle B$ 和 $\angle C$ 的平分线引垂线，垂足分别为 A_1 和 A_2. 同理，定义 B_1,B_2 和 C_1,C_2. 证明：$2(A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2)=AB+BC+CA$.

(2002－2003年匈牙利数学奥林匹克)

证明　如图6，易知 $\angle B,\angle C$ 的平分线的交点为内心 I，过点 I 分别作 AB,AC,BC 的垂线交三边于 F,E,D.

因为 $\angle AA_2C=\angle AA_1B=90°$，所以，$A,A_2,I,A_1$ 四点共圆，且 AI 为此圆的直径. 由弦角关系，有

$$A_2A_1=AI\cdot\sin\angle A_2IA_1$$

因为 $\angle A_2IA_1=180°-\left(\dfrac{\angle ABC}{2}+\dfrac{\angle ACB}{2}\right)=90°+\dfrac{\angle BAC}{2}$

所以　$A_2A_1=AI\cdot\cos\dfrac{BAC}{2}=AF$

$$2A_2A_1=AF+AE$$

同理　$2B_1B_2=BD+BF,2C_1C_2=CD+CE$

因此　$2(A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2)=AB+BC+CA$

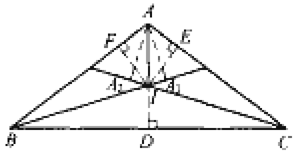


图6

⑥ 平面上的点集 H 称为是好的，如果 H 中任意3个点都存在一条对称轴，使得这3个点关于这条对称轴对称．证明：

(1) 一个好的集合不一定是轴对称的；

(2) 如果一个好的集合中恰有2 003个点，则这2 003个点在一条直线上．

（2002 - 2003年匈牙利数学奥林匹克）

证明 (1) 如图7，$\triangle ABC$，$\triangle ADC$，$\triangle BCD$ 均为等腰三角形，A,B,D 也共线．所以，任意三个点皆有一条对称轴．故它是一个好的集合．但是 A,B,C,D 不是轴对称的．

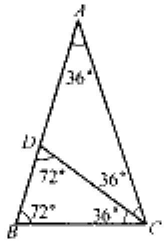


图7

(2) 反证法．假设结论不成立．于是，不可能有集合中的6个点共线．否则，在这条直线外必有1个属于集合的点 K，过点 K 作此直线的垂线，则此直线上必有至少3个点在这条垂线的同侧，记为 A,B,C(图8)．

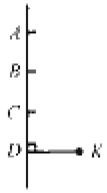


图8

因为 $\angle KCB,\angle KBA > \frac{\pi}{2}$，所以，$AC > BC$．

由于 K,C,B 有对称轴，则 $BC = CK$．

同理，$AC = CK$，矛盾．故不可能有集合中的6个点共线．

不妨设 A,B 为这个集合中距离最短的两个点(图9)．则其余2 001个点有以下4种情况：

1) 在线段 AB 中垂线上；

2) 在 AB 所在直线上；

3) 在以 A 为圆心，AB 长为半径的圆上；

4) 在以 B 为圆心，AB 长为半径的圆上．

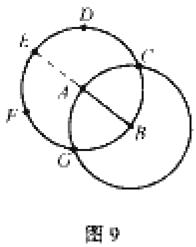


图9

由前面的证明可知，1)，2)两种情况点的总数不超过10个．又因为 AB 的距离最小，所以，3)，4)两种情况点的总数不超过10个．

故 $10 + 10 + 2 < 2\,003$，矛盾．

因此，结论成立．

⑦ 设 H 是锐角 $\triangle ABC$ 的高线 CP 上的任一点，直线 AH,BH 分别交 BC,AC 于点 M,N．

(1) 证明：$\angle NPC = \angle MPC$；

(2) 设 O 是 MN 与 CP 的交点，一条通过 O 的任意的直线交四边形 $CNHM$ 的边于 D,E 两点．证明：$\angle EPC = \angle DPC$．

（2003年保加利亚数学奥林匹克）

证明 (1) 记 $\angle NPC = \varphi_1$，$\angle MPC = \varphi_2$．则

$$\frac{S_{\triangle NPC}}{S_{\triangle NPA}}=\frac{CN}{AN}=\frac{CP\cdot PN\cdot \sin\varphi_1}{AP\cdot PN\cdot \cos\varphi_1}=\frac{CP\cdot \sin\varphi_1}{AP\cdot \cos\varphi_1}$$

所以　$$\tan\varphi_1=\frac{CN}{AN}\cdot\frac{AP}{CP}$$

同理　$$\tan\varphi_2=\frac{CM}{BM}\cdot\frac{BP}{CP}$$

于是，$\tan\varphi_1=\tan\varphi_2$ 等价于

$$\frac{CN}{AN}\cdot\frac{AP}{BP}\cdot\frac{BM}{CM}=1$$

在 $\triangle ABC$ 中，利用塞瓦(Ceva)定理，取直线 AM,BN,CP 就可得到上式.

(2) 记 $\angle NPC=\angle MPC=\varphi$.

欲证结论，只须证明

$$\frac{\sin(\varphi-x)}{\sin x}=\frac{\sin(\varphi-y)}{\sin y}$$

其中，$x=\angle EPO$，$y=\angle DPO$.

事实上，后者等价于

$$\frac{\sin\varphi\cdot\cos x-\cos\varphi\cdot\sin x}{\sin x}=\frac{\sin\varphi\cdot\cos y-\cos\varphi\cdot\sin y}{\sin y}\Leftrightarrow$$

$$\cot x=\cot y\Leftrightarrow x=y$$

假定 $E\in NH$，$D\in CM$. 则

$$\frac{NE}{EH}=\frac{S_{\triangle NEP}}{S_{\triangle EHP}}=\frac{NP\cdot\sin(\varphi-x)}{PH\cdot\sin x}$$

因此

$$\frac{\sin(\varphi-x)}{\sin x}=\frac{NE}{EH}\cdot\frac{PH}{NP}\qquad①$$

同理可得

$$\frac{\sin(\varphi-y)}{\sin y}=\frac{DM}{CD}\cdot\frac{CP}{PM}\qquad②$$

利用 ① 和 ② 只须证明

$$\frac{NE}{EH}\cdot\frac{CD}{DM}\cdot\frac{PH}{CP}\cdot\frac{MO}{NO}=1\qquad③$$

因为 PO 是 $\triangle NPM$ 的角平分线，即 $\frac{PM}{PN}=\frac{MO}{NO}$. 又因为

$$\frac{NE}{EH}=\frac{S_{\triangle NEO}}{S_{\triangle EHO}}=\frac{NO\cdot\sin\delta}{OH\cdot\sin\psi}$$

$$\frac{CD}{DM}=\frac{S_{\triangle CDO}}{S_{\triangle DMO}}=\frac{CO\cdot\sin\psi}{OM\cdot\sin\delta}$$

其中，$\delta=\angle MOD$，$\psi=\angle EOP$. 于是，式 ③ 可简化为

$$\frac{OC}{OH}\cdot\frac{PH}{PC}=1$$

分别对 $\triangle BHC$ 和直线 MN，$\triangle CHM$ 和直线 AB，$\triangle BHM$ 和直线

AC 应用梅涅劳斯定理,可得

$$\frac{BN}{NH}\cdot\frac{HO}{OC}\cdot\frac{CM}{MB}=1$$

$$\frac{CP}{PH}\cdot\frac{HA}{AM}\cdot\frac{MB}{BC}=1$$

$$\frac{HN}{NB}\cdot\frac{BC}{CM}\cdot\frac{MA}{HA}=1$$

三式相乘得 $$\frac{OC}{OH}\cdot\frac{PH}{PC}=1$$

⑧ P 是 $\triangle ABC$ 内的一点,直线 AC,BP 相交于 Q,直线 AB,CP 相交于 R.已知 $AR=RB=CP$,$CQ=PQ$.求 $\angle BRC$.

(2003 年日本数学奥林匹克)

解 如图 10,设 S 是线段 CR 上的点,且使得 $RS=CP$.因为 $CQ=PQ$,所以

$$\angle ACS=\angle QPC=\angle BPR$$

因为 $RS=CP$,所以

$$SC=CR-RS=CR-CP=RP$$

考虑 $\triangle ABQ$ 与直线 CR,由梅涅劳斯定理有

$$\frac{RB}{AR}\cdot\frac{PQ}{BP}\cdot\frac{AC}{CQ}=1$$

又因为 $AR=RB$,$CQ=PQ$,则 $\frac{AC}{BP}=1$.所以,$AC=BP$.因此,$\triangle ACS\cong\triangle BPR$.故 $AS=BR$.

由 $RS=CP$ 和已知有 $AS=AR=RS$.因此,$\angle ARS=60^\circ$.故 $\angle BRC=120^\circ$.

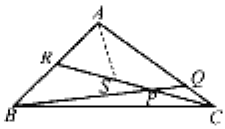


图 10

⑨ 在锐角 $\triangle ABC$ 中,点 A,B 到对边垂线的垂足分别为 H_a,H_b.$\angle A$,$\angle B$ 的平分线分别交对边于点 W_a,W_b.证明:$\triangle ABC$ 的内心 I 在线段 H_aH_b 上当且仅当外心 O 在 W_aW_b 上.

(2002 ~ 2003 年德国数学奥林匹克)

证明 先给出一个熟知的引理:任一锐角三角形相似于两条高线的垂足与第三个顶点构成的三角形.

如图 11,要证原结论,只须证

$$I\in H_aH_b\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\cos\gamma=\frac{a+b}{a+b+c}\overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\cos\gamma=\cos\alpha+\cos\beta\overset{(3)}{\Leftrightarrow}O\in W_aW_b$$

其中,α,β,γ 为 $\triangle ABC$ 的三个内角.

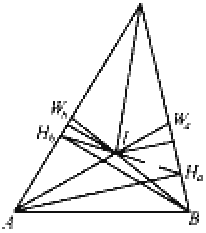


图 11

注：(1) 在 $\triangle BH_bC$ 中，$CH_b = a\cdot\cos\gamma$.

同理，$CH_a = b\cdot\cos\gamma$.

由引理知，$\triangle H_aH_bC \backsim \triangle ABC$. 则

$$\frac{CH_b}{CB} = \frac{a\cdot\cos\gamma}{a} = \cos\gamma$$

因此 $$S_{\triangle H_bH_aC} = S_{\triangle ABC}\cdot\cos^2\gamma$$

由角平分线定理有

$$I\in H_aH_b \Leftrightarrow S_{\triangle CH_bH_a} = S_{\triangle CH_bI} + S_{\triangle CIH_a} \Leftrightarrow$$

$$S_{\triangle ABC}\cdot\cos^2\gamma = \frac{1}{2}ra\cdot\cos\gamma + \frac{1}{2}rb\cdot\cos r \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}r(a+b+c)\cos^2\gamma = \frac{1}{2}r(a+b)\cos\gamma \Leftrightarrow$$

$$\cos\gamma = \frac{a+b}{a+b+c}$$

(2) $a = b\cdot\cos\gamma + c\cdot\cos\beta$，$b = a\cdot\cos\gamma + c\cdot\cos\alpha$.

(3) 如图 12，在 $\triangle OM_bC$ 中，$M_bO = R\cdot\cos\beta$.

同理，$M_aO = R\cdot\cos\alpha$，$M_cO = R\cdot\cos\gamma$. 所以

$$O\in W_aW_b \Leftrightarrow S_{\triangle CW_bW_a} = S_{\triangle CW_bO} + S_{\triangle COW_a} \Leftrightarrow$$

$$S_{\triangle ABC}\cdot\frac{a}{a+c}\cdot\frac{b}{b+c} =$$

$$\frac{ab}{2(a+c)}\cdot R\cdot\cos\beta +$$

$$\frac{ab}{2(b+c)}\cdot R\cdot\cos\alpha \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}aR\cdot\cos\alpha + \frac{1}{2}bR\cdot\cos\beta + \frac{1}{2}cR\cdot\cos\gamma\right)\cdot$$

$$\frac{a}{a+c}\cdot\frac{b}{b+c} =$$

$$\frac{1}{2}Rab\left(\frac{\cos\beta}{a+c} + \frac{\cos\alpha}{b+c}\right) \Leftrightarrow \cos\gamma = \cos\alpha + \cos\beta$$

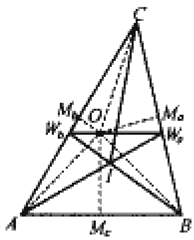


图 12

⑩ 在 ▱$ABCD$ 中，M，N 分别在 AB，BC 上，且 M，N 不与端点重合，$AM = NC$. 设 AN 与 CM 交于点 Q. 证明：DQ 平分 $\angle ADC$.

（2002～2003 年德国数学奥林匹克）

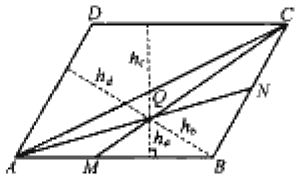


图 13

证明　如图 13，有

$$S_{\triangle AQC} = S_{\triangle AMC} - S_{\triangle AMQ} = S_{\triangle CNA} - S_{\triangle CNQ}$$

记点 Q 到 AB，BC，CD，DA 的距离分别为 h_a，h_b，h_c，h_d. 从而

$$\frac{1}{2}AM(h_a + h_c) - \frac{1}{2}AM\cdot h_a =$$

$$\frac{1}{2}CN(h_b+h_d)-\frac{1}{2}CN\cdot h_b \Leftrightarrow \frac{1}{2}AM\cdot h_c=\frac{1}{2}CN\cdot h_d$$

由 $AM=CN\neq 0$ 知，$h_c=h_d$，即 Q 在 $\angle ADC$ 的平分线上.

11 对于任意三角形都有两条边的边长之差不超过这个三角形周长的六分之一. 请判断此命题是否成立.

（阿拉尼·丹尼尔竞赛）

证明 假设命题不成立.

不妨设不满足结论的三角形三边长为 a,b,c，且 $a>b>c$，则大边与小边差均大于三角形周长的六分之一，于是有

$$c>a-b>\frac{a+b+c}{6}$$

$$b>c+\frac{a+b+c}{6}>\frac{a+b+c}{3}$$

$$a>b+\frac{a+b+c}{6}>\frac{a+b+c}{2}$$

所以，$a+b+c>a+b+c$，矛盾.

因此，命题成立.

12 已知 $\triangle ABC$，且边 AC，BC 中点的连线为 l_c，$\angle A$，$\angle B$ 的平分线分别交直线 l_c 于 M，N. 同理，在直线 l_b 上定义 K，L；在直线 l_a 上定义 P，Q. 证明：

$$2(MN+KL+PQ)=AB+BC+CA$$

（阿拉尼·丹尼尔竞赛）

证明 如图 14，有

$$QE=BE=\frac{c}{2},PF=CF=\frac{b}{2},EF=\frac{a}{2}$$

所以 $$PQ=QE+PF-EF=\frac{b+c-a}{2}$$

同理 $$MN=\frac{a+b-c}{2},KL=\frac{a+c-b}{2}$$

因此 $$2(MN+KL+PQ)=AB+BC+CA$$

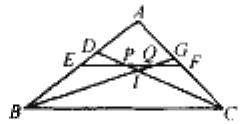


图 14

13 如图 15，已知锐角 $\triangle ABC$ 的三边 BC，CA，AB 的中点分别为 A_1，B_1，C_1. 分别由 A_1，B_1，C_1 向 $\triangle ABC$ 的另外两条边作垂线，相应的交点分别为 A_2，B_2，C_2. 证明：六边形 $A_1C_2B_1A_2C_1B_2$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 面积的一半.

（2003 年德国数学奥林匹克）

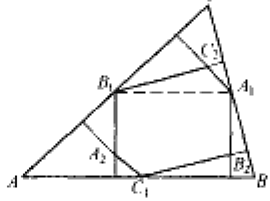


图 15

证明　如图16，联结 A_1B_1，B_1C_1，C_1A_1，作 $\triangle A_1B_1C_1$ 的三条高 A_1A_3，B_1B_3，C_1C_3. 设 $\triangle A_1B_1C_1$ 的垂心为 H.

因为 $B_1H \perp AC$，$C_1A_2 \perp AC$，则 $B_1H \parallel C_1A_2$.

同理，$C_1H \parallel B_1A_2$.

所以，$B_1A_2C_1H$ 是平行四边形. 从而 $S_{\triangle B_1A_2C_1} = S_{\triangle B_1C_1H}$.

同理 $S_{\triangle A_1B_2C_1} = S_{\triangle A_1C_1H}$，$S_{\triangle A_1B_1C_2} = S_{\triangle A_1B_1H}$. 因此

$$S_{六边形A_1C_2B_1A_2C_1B_2} = 2S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$$

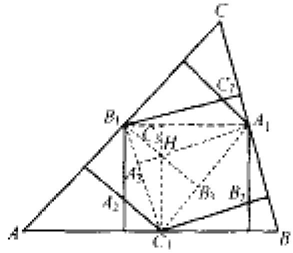


图 16

⑭ 在一条直线上按 A，B，C 的次序排列着三个点，且 $AB = 8$，$AC = 18$. D 为直线外一点，且 $DA \perp AB$. 求 AD 等于多少时，$\angle BDC$ 有最大值？

（2003年新加坡数学奥林匹克）

解　如图17，设 $AD = x$. 在 $\triangle ADC$ 中，$\tan\angle 1 = \frac{x}{8}$，$\tan\angle 2 = \frac{x}{18}$. 于是可得

$$\tan\alpha = \tan(\angle 1 - \angle 2) = \frac{\tan\angle 1 - \tan\angle 2}{1 + \tan\angle 1 \cdot \tan\angle 2} =$$

$$\frac{\frac{x}{8} - \frac{x}{18}}{1 + \frac{x}{8} \times \frac{x}{18}} = \frac{10}{\frac{144}{x} + x} \leqslant \frac{10}{2\sqrt{144}} = \frac{5}{12}$$

因此，当 $x = 12$ 时，$\tan\alpha$ 有最大值 $\frac{5}{12}$，即 α 有最大值 $\arctan\frac{5}{12}$.

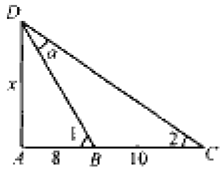


图 17

⑮ 已知梯形 $ABCD$，$AB \parallel CD$. 若高为2，$AB = 2$，$CD = 4$，且 AB 的中点为 M. 当边 CD 上的点 N 移动时，求 $\triangle ANB$ 和 $\triangle DMC$ 公共部分的面积的最大值.

（2003年新加坡数学奥林匹克）

解　如图18，设

$$AN \cap DM = E, MC \cap BN = F, DN = x$$

则 $S_{四边形MENF} = S_{\triangle MEN} + S_{\triangle MFN} =$

$$\frac{EN}{AN} \cdot S_{\triangle AMN} + \frac{FN}{BN} \cdot S_{\triangle BMN} =$$

$$\frac{x}{1 + x} \times 1 + \frac{4 - x}{5 - x} \times 1 = 2 -$$

$$\frac{1}{1 + x} - \frac{1}{5 - x} = 2 - \frac{6}{-x^2 + 4x + 5} =$$

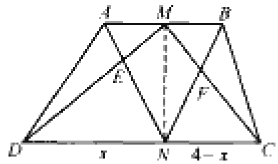


图 18

$$2+\frac{6}{(x-2)^2-9}\leqslant 2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

当 $x=2$ 时,上式等号成立.

⑯ 已知一个角的一条边上有 1 001 个不同的点 $A_0,A_1,\cdots,A_{1\,000}$,另一条边上也有 1 001 个不同的点 $B_0,B_1,\cdots,B_{1\,000}$,且满足

$$A_0A_1=A_1A_2=\cdots=A_{999}A_{1\,000}$$

$$B_0B_1=B_1B_2=\cdots=B_{999}B_{1\,000}$$

若四边形 $A_0A_1B_1B_0$ 和四边形 $A_1A_2B_2B_1$ 的面积分别为 5 和 7,求四边形 $A_{999}A_{1\,000}B_{1\,000}B_{999}$ 的面积.

(2003 年白俄罗斯数学奥林匹克)

解 如图 19,设四边形 $A_{k-1}A_kB_kB_{k-1}$ 的面积为 S_k,$k=1,2,\cdots,1\,000$.

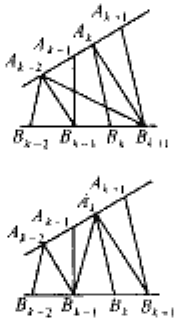


图 19

由于

$$S_{\triangle B_{k-2}A_{k-2}B_{k-1}}=\frac{1}{3}S_{\triangle B_{k-2}A_{k-2}B_{k+1}}$$

$$S_{\triangle A_{k+1}B_{k+1}A_k}=\frac{1}{3}S_{\triangle A_{k+1}B_{k+1}A_{k-2}}$$

则 $S_{\triangle B_{k-2}A_{k-2}B_{k-1}}+S_{\triangle A_{k+1}B_{k+1}A_k}=\frac{1}{3}(S_{k-1}+S_k+S_{k+1})$

因为 $S_{\triangle A_{k-2}B_{k-1}A_{k-1}}=S_{\triangle A_{k-1}B_{k-1}A_k}$,$S_{\triangle B_{k-1}A_kB_k}=S_{\triangle B_kA_kB_{k+1}}$

所以

$$\begin{aligned}S_{k-1}+S_k+S_{k+1}=&(S_{\triangle B_{k-2}A_{k-2}B_{k-1}}+S_{\triangle A_{k+1}B_{k+1}A_k})+\\&(S_{\triangle A_{k-2}A_{k-1}B_{k-1}}+S_{\triangle A_{k-1}B_{k-1}A_k})+\\&(S_{\triangle B_{k-1}A_kB_k}+S_{\triangle A_kB_kB_{k+1}})=\\&\frac{1}{3}(S_{k-1}+S_k+S_{k+1})+\\&2(S_{\triangle A_{k-1}B_{k-1}A_k}+S_{\triangle A_kB_kB_{k-1}})=\\&\frac{1}{3}(S_{k-1}+S_k+S_{k+1})+2S_k\end{aligned}$$

于是

$$S_k=\frac{1}{2}(S_{k-1}+S_{k+1})$$

故 $S_1,S_2,\cdots,S_{1\,000}$ 是等差数列.

因为公差为 $S_2-S_1=7-5=2$,所以

$$S_{1\,000}=S_1+999(S_2-S_1)=5+999\times 2=2\,003$$

⑰ 已知圆内接四边形 $ABCD$ 满足 $AB = BC = AD + CD$，$\angle BAD = \alpha$，$AC = d$. 求 $\triangle ABC$ 的面积.

（2003 年白俄罗斯数学奥林匹克）

解　设 M 是 AD 延长线上的点，且满足 $DM = DC$，又设 $AD = x$，$CD = y$，$AB = z$. 因为 $\angle CDM = \angle ABC$，所以，$\triangle DCM \backsim \triangle BAC$.

设 $k = \frac{CD}{AB} = \frac{y}{z}$. 则

$$CM = k \cdot AC = kd, S_{\triangle CDM} = k^2 \cdot S_{\triangle ABC}$$

$$S_{\triangle CDM} = \frac{y}{x+y} \cdot S_{\triangle ACM} = \frac{y}{z} \cdot S_{\triangle ACM} = k \cdot S_{\triangle ACM}$$

由于 $\angle DCM = \angle BCA$，所以

$$\angle ACM = \angle BCD = 180^\circ - \alpha$$

故

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{k^2} \cdot S_{\triangle DCM} = \frac{1}{k^2} \cdot k \cdot S_{\triangle ACM} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2} AC \cdot CM \cdot \sin \angle ACM = \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{2} d \cdot kd \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = \frac{1}{2} d^2 \cdot \sin \alpha$$

⑱ 若三角形和矩形有相等的周长和面积，则称它们是“孪生的”. 证明：对于给定的三角形，存在“孪生的”矩形，该矩形不是正方形，且较长的边与较短的边之比至少为 $\lambda - 1 + \sqrt{\lambda(\lambda - 2)}$，其中 $\lambda = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

（2003 年白俄罗斯数学奥林匹克）

证明　设矩形的边长分别为 x, y，三角形的半周长为 p，面积为 S. 则这个三角形和矩形是“孪生的”充分必要条件是

$$\begin{cases} x + y = p \\ xy = S \end{cases} \quad ①$$

方程组 ① 有实根的充分必要条件是 $p^2 \geqslant 4S$.

由 p 和 S 是正数可知这两个根均为正根. 因为

$$\frac{p^2}{S} = \frac{(x+y)^2}{xy} = \frac{x^2 + y^2 + 2xy}{xy} = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + 2$$

设 $\frac{x}{y} = t$，则有

$$t^2 - \left(\frac{p^2}{S} - 2\right) t + 1 = 0$$

易知该方程有实数根的充分必要条件是 $p^2 \geqslant 4S$. 于是,矩形与三角形是"孪生的"充分必要条件是矩形边的较大的比为

$$t = \frac{p^2}{2S} - 1 + \sqrt{\frac{p^2}{2S}\left(\frac{p^2}{2S} - 2\right)}$$

其中,$p^2 \geqslant 4S$.

设 a,b,c 是三角形的三边长,由均值不等式和海伦公式,有

$$\frac{p}{3} = \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \geqslant$$

$$\sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt[3]{\frac{S^2}{p}}$$

所以,$\frac{p^2}{S} \geqslant 3\sqrt{3}$,且三角形为正三角形时,等号成立. 故易知 $\frac{p^2}{S}$ 的变化区域为 $[3\sqrt{3}, +\infty)$.

设 $\frac{p^2}{2S} = \lambda$. 则这个矩形与三角形是"孪生的"充分必要条件是矩形边的较大的比为 $\lambda - 1 + \sqrt{\lambda(\lambda - 2)}$,其中 $\lambda \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

因为对于 $\lambda \geqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}$,函数 $t = \lambda - 1 + \sqrt{\lambda(\lambda - 2)}$ 是单调增加的. 于是,可得矩形与三角形是"孪生的"充分必要条件是矩形边的较大的比大于等于 $\lambda - 1 + \sqrt{\lambda(\lambda - 2)}$,其中 $\lambda = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

因此,对任意三角形均存在一个"孪生的"矩形.

(19) 已知凸五边形 $ABCDE$ 满足 $AB = BC, CD = DE$, $\angle ABC = 150°$, $\angle CDE = 30°$, $BD = 2$. 求五边形 $ABCDE$ 的面积.

(2003 年白俄罗斯数学奥林匹克)

解 如图 20,设点 K 是点 C 关于直线 BD 的对称点. 则

$$BK = BC = BA, DK = DC = DE$$

作 $\angle ABK$ 和 $\angle EDK$ 的平分线,且交于点 M. 于是,BM 是 AK 的中垂线,DM 是 EK 的中垂线. 特别地,有 $MA = MK = ME$,即 M 是 $\triangle AKE$ 的外心. 因为

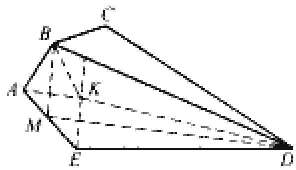


图 20

$$\angle MBD = \angle MBK + \angle KBD = \frac{1}{2}\angle ABK + \frac{1}{2}\angle KBC = \frac{1}{2}\angle ABC$$

$$\angle MDB = \frac{1}{2}\angle CDE$$

则 $\angle MBD + \angle MDB = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle CDE) = \frac{1}{2} \times 180° = 90°$

于是，$\angle BMD = 90°$，即 $BM \perp DM$. 又因为 $AK \perp BM$，$MD \perp KE$，所以，$AK \perp KE$. 故 AE 是 $Rt\triangle AKE$ 的斜边，即 M 是 AE 的中点.

因为 $S_{\triangle ABM} = S_{\triangle KBM}$，$S_{\triangle EDM} = S_{\triangle KDM}$，$S_{\triangle BCD} = S_{\triangle BKD}$，所以

$$S_{五边形ABCDE} = 2S_{\triangle BMD} = BM \cdot MD =$$
$$BD \cdot \cos\angle MBD \cdot BD \cdot \sin\angle MBD =$$
$$\frac{1}{2}BD^2 \cdot \sin 2\angle MBD =$$
$$\frac{1}{2} \cdot BD^2 \cdot \sin\angle ABC = \frac{1}{2} \times 2^2 \times \frac{1}{2} = 1$$

⑳ 锐角 $\triangle ABC$ 中，H 是垂心，O 是外心，I 是内心. 已知 $\angle C > \angle B > \angle A$. 求证：$I$ 在 $\triangle BOH$ 的内部.

（第 39 届国际数学奥林匹克中国国家队选拔赛试题）

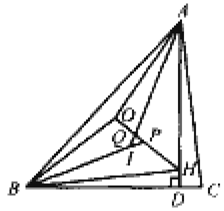


图 21

证明 如图 21，AI，BI 分别为 $\angle HAO$，$\angle OBH$ 的平分线. 所以 I 一定在 $\angle OBH$ 内，所以只须证 AI 与 BI 的交点在 OH 的下部.

设 $\angle B$ 的角平分线交 OH 于 P，$\angle A$ 的平分线交 OH 于 Q. 有

$$\angle ABO = 90° - \frac{1}{2}\angle AOB = 90° - \angle C = \angle HBC$$

又 $\angle ABI = \angle IBC$，所以 $\angle OBI = \angle IBH$，即 BI 平分角 $\angle OBH$，同理 AI 平分 $\angle OAH$.

根据角平分线定理，有

$$\frac{BH}{BO} = \frac{PH}{OP}, \frac{AH}{AO} = \frac{QH}{OQ}$$

因为 $\angle B > \angle A$，所以 $AC > BC$，$AH > BH$.

又 $AO = BO$. 所以 $\frac{QH}{OQ} > \frac{PH}{OP}$，所以 $OQ < OP$. 即 Q 在 OP 之间，所以 AQ 与 BP 交于 OH 下方，即 I 在 $\triangle BOH$ 内部.

㉑ 设 D 为锐角 $\triangle ABC$ 内部一点，且满足条件：$DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA = AB \cdot BC \cdot CA$，试确定点 D 的几何位置，并证明你的结论.

（1998 年中国数学冬令营）

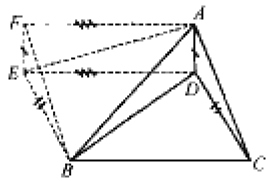


图 22

证法 1 如图22，作 $ED \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} BC$，$AF \mathrel{\underline{\mathbin{/\!/}}} ED$，则四边形 $ADEF$ 与 $DCBE$ 是平行四边形. 联结 BF，AE. 则四边形 $AFBC$ 也是平行四边形. 于是，$AF = ED = BC$，$EF = AD$，$EB = DC$，$FB = AC$.

在四边形 $AFEB$ 和四边形 $AEBD$ 中，由托勒密(Ptolemy)定理，有

$$AB \cdot EF + AF \cdot BE \geqslant AE \cdot FB$$
$$AD \cdot EB + AE \cdot BD \geqslant AB \cdot ED$$

所以

$$AB \cdot AD + BC \cdot DC \geqslant AE \cdot AC \quad ①$$
$$AD \cdot DC + AE \cdot BD \geqslant AB \cdot BC \quad ②$$

结合①,②两式可得

$$\begin{aligned} & DA \cdot DB \cdot AB + DB \cdot DC \cdot BC + DC \cdot DA \cdot CA = \\ & DB \cdot (DA \cdot AB + DC \cdot BC) + DC \cdot DA \cdot CA \geqslant \\ & DB \cdot AE \cdot AC + DC \cdot DA \cdot CA = \\ & AC \cdot (DB \cdot AE + DC \cdot DA \geqslant AC \cdot AB \cdot BC \end{aligned} \quad ③$$

等号成立的充分必要条件是①与②同时取等号,即四边形 $ABEF$ 与四边形 $AEBD$ 均为圆内接四边形,所以五边形 $ADBEF$ 为圆内接五边形.由于四边形 $ADEF$ 为平行四边形,故四边形 $ADEF$ 为矩形,故 $AD \perp ED$,故 $AD \perp BC$.且 $\angle EBA = \angle EDA = 90°$,故 $DC \perp AB$.所以点 D 为 $\triangle ABC$ 垂心.

证法 2 如图23,以 D 为原点,建立复平面,设点 A,B,C 在该复平面上对应的复数分别为 z_1,z_2,z_3.则不等式③等价于不等式

$$|z_1 \cdot z_2(z_1 - z_2)| + |z_2 \cdot z_3(z_2 - z_3)| + |z_3 \cdot z_1(z_3 - z_1)| \geqslant |(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)|$$

即

$$\left|\frac{z_1 \cdot z_2}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_3)}\right| + \left|\frac{z_3 \cdot z_1}{(z_3 - z_2)(z_1 - z_2)}\right| + \left|\frac{z_2 \cdot z_3}{(z_2 - z_1(z_3 - z_1))}\right| \geqslant 1 \quad ④$$

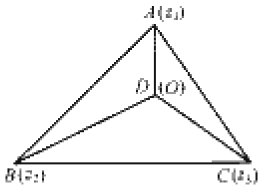


图 23

由④,我们联想到下面的恒等式

$$\frac{z_1 \cdot z_2}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_3)} + \frac{z_2 \cdot z_3}{(z_2 - z_1)(z_3 - z_1)} + \frac{z_1 \cdot z_3}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_2)} = 1 \quad ⑤$$

令 $\alpha_1 = \dfrac{z_3 \cdot z_2}{(z_3 - z_1)(z_2 - z_1)}, \alpha_2 = \dfrac{z_1 \cdot z_3}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_2)}$

$$\alpha_3 = \frac{z_1 \cdot z_2}{(z_1 - z_3)(z_2 - z_3)}$$

显然,$\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \neq 0$,且

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

所以 $|\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3| = 1$

即 $1 = |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3| \leqslant |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3|$

这正是原不等式的等价形式,所以不等式③得证.并且,不等式

③成立的充分必要条件是 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 所对应的向量同向. 又由 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$,得 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为正实数.

另外,容易验证下面的等式

$$-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3}=\left(\frac{z_3}{z_1-z_2}\right)^2,-\frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1}=\left(\frac{z_1}{z_2-z_3}\right)^2,-\frac{\alpha_3\alpha_1}{\alpha_2}=\left(\frac{z_2}{z_3-z_1}\right)^2 \quad ⑥$$

1) 因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为正实数,所以 $\frac{z_2}{z_1-z_3}$ 和 $\frac{z_3}{z_1-z_2}$ 均为纯虚数,所以 $CD\perp AB$, $BD\perp AC$,所以 D 为 $\triangle ABC$ 垂心.

2) 若 D 为 $\triangle ABC$ 垂心,则 $\frac{z_3}{z_1-z_2},\frac{z_2}{z_3-z_1},\frac{z_1}{z_2-z_3}$ 均为纯虚数,由③得 $\frac{\alpha_1\alpha_2}{\alpha_3},\frac{\alpha_2\alpha_3}{\alpha_1},\frac{\alpha_3\alpha_1}{\alpha_2}$ 均为正实数, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 不可能都是负数,不妨设 $\alpha_1>0$,则 $\frac{\alpha_2}{\alpha_3}>0$, $\alpha_2\alpha_3>0$,即 $\alpha_2>0$, $\alpha_3>0$,所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 都是正实数.

综合1),2),③等号成立的充分必要条件是 D 为 $\triangle ABC$ 垂心.

㉒ 如图24,在四边形 $ABCD$ 中,对角线 AC 平分 $\angle BAD$. 在 CD 上取一点 E, BE 与 AC 相交于 F,延长 DF 交 BC 于 G. 求证: $\angle GAC=\angle EAC$.

(1999年全国高中数学联赛)

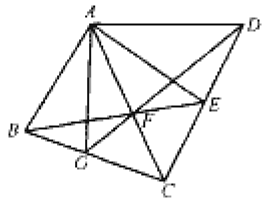


图24

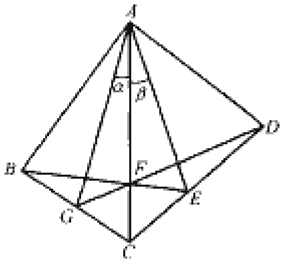


图25

证法1 如图25,记 $\angle BAC=\angle CAD=\theta$, $\angle GAC=\alpha$, $\angle EAC=\beta$. 直线 GFD 与 $\triangle BCE$ 相截,由梅涅劳斯(Menelaus)定理,有

$$1=\frac{BG}{GC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FB}=\frac{S_{\triangle ABG}}{S_{\triangle AGC}}\cdot\frac{S_{\triangle ACD}}{S_{\triangle ADE}}\cdot\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle AFB}}=$$

$$\frac{AB\cdot\sin(\theta-\alpha)}{AC\cdot\sin\alpha}\cdot\frac{AC\cdot\sin\theta}{AE\cdot\sin(\theta-\beta)}\cdot$$

$$\frac{AE\cdot\sin\beta}{AB\cdot\sin\theta}=\frac{\sin(\theta-\alpha)\cdot\sin\beta}{\sin\alpha\cdot\sin(\theta-\beta)}$$

所以
$$\sin(\theta-\alpha)\cdot\sin\beta=\sin(\theta-\beta)\cdot\sin\alpha$$

展开即

$$\sin\theta\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta-\cos\theta\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta=$$
$$\sin\theta\cdot\cos\beta\cdot\sin\alpha-\cos\theta\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha$$

即
$$\cos\alpha\cdot\sin\beta=\cos\beta\cdot\sin\alpha$$

所以 $\tan\alpha=\tan\beta$, α,β 都是锐角,故 $\alpha=\beta$,即 $\angle GAC=\angle EAC$.

证法 2 如图26，记 $\angle BAC=\angle DAC=\theta$，$\angle GAC=\alpha$，$\angle EAC=\beta$.

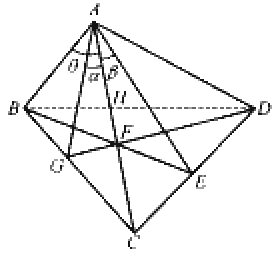


图 26

在 $\triangle ABG$ 和 $\triangle ACG$ 中，由正弦定理，得

$$\frac{AB}{BG}=\frac{\sin\angle BGA}{\sin(\theta-\alpha)},\frac{AC}{GC}=\frac{\sin\angle AGC}{\sin\alpha}$$

从而

$$\frac{AB}{AC}\cdot\frac{GC}{BG}=\frac{\sin\angle BGA}{\sin(\theta-\alpha)}\cdot\frac{\sin\theta}{\sin\angle AGC}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)} \quad ①$$

同理，在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle AEC$ 中，由正弦定理可得

$$\frac{AC}{EC}\cdot\frac{DE}{AD}=\frac{\sin(\theta-\beta)}{\sin\beta} \quad ②$$

① × ② 得

$$\frac{AB}{AD}\cdot\frac{GC}{BG}\cdot\frac{DE}{EC}=\frac{\sin\alpha\cdot\sin(\theta-\beta)}{\sin\beta\cdot\sin(\theta-\alpha)}$$

联结 BD 与对角线 AC 交于 H，则由 AC 平分 $\angle BAD$ 知

$$AB:AD=BH:HD$$

又在 $\triangle BCD$ 中，由塞瓦定理知

$$\frac{BH}{HD}\cdot\frac{DE}{EC}\cdot\frac{GC}{BG}=1$$

从而

$$\frac{AB}{AD}\cdot\frac{GC}{BG}\cdot\frac{DE}{EC}=1$$

即

$$\frac{\sin\alpha\cdot\sin(\theta-\beta)}{\sin\beta\cdot\sin(\theta-\alpha)}=1$$

化简得 $\tan\alpha=\tan\beta$，而 α,β 都是锐角，故 $\alpha=\beta$，即 $\angle GAC=\angle EAC$.

证法 3 以 A 为坐标原点，AC 所在直线为 y 轴建立如图27的直角坐标系. 设直线 CD 的方程为 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，直线 BC 的方程为 $\frac{x}{e}+\frac{y}{b}=1$，直线 BE 方程为 $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$，直线 DG 方程为 $\frac{x}{p}+\frac{y}{n}=1$.

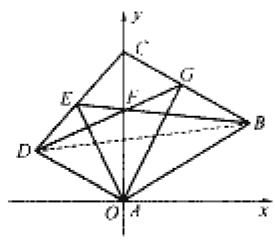


图 27

由直线 CD 与 BE 的方程知 AE 方程为

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{m}\right)x+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{n}\right)y=0$$

由直线 DG 与 BC 方程得 AG 方程为

$$\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{p}\right)x+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{n}\right)y=0$$

由直线 DC 与 DG 方程得 AD 方程为

$$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{p}\right)x+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{n}\right)y=0$$

由 BC 与 BE 方程得 AB 方程

$$\left(\frac{1}{e}-\frac{1}{m}\right)x+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{n}\right)y=0$$

因为 $\angle DAC=\angle BAC$，所以 $k_{AD}=-k_{AB}$，即

$$\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{n}}=\frac{\frac{1}{e}-\frac{1}{m}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{b}}$$

化简得 $$\frac{1}{a}-\frac{1}{p}=\frac{1}{m}-\frac{1}{e}$$

从而 $$\frac{1}{a}-\frac{1}{m}=\frac{1}{p}-\frac{1}{e}$$

由直线 AE 和 AG 的方程知

$$k_{AE}=\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{m}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{b}},k_{AG}=\frac{\frac{1}{e}-\frac{1}{p}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{b}}=\frac{\frac{1}{m}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{b}}$$

所以 $k_{AE}=-k_{AG}$，由此知 $\angle GAC=\angle EAC$.

㉓ 平面上给定凸四边形 $ABCD$ 及其内点 E 和 F，适合 $AE=BE$，$CE=DE$，$\angle AEB=\angle CED$，$AF=DF$，$BF=CF$，$\angle AFD=\angle BFC$. 求证：$\angle AFD+\angle AEB=\pi$.

（第 42 届国际数学奥林匹克中国国家队选拔赛试题）

证明　如图 28，设凸四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 相交于 G. 因为

$$FA=FD,FB=FC$$

$$\angle AFC=\angle AFB+\angle BFC=\angle AFB+\angle AFD=\angle BFD$$

所以 $$\triangle AFC\cong\triangle DFB$$

$$\angle FAG=\angle FAC=\angle FDB=\angle FDG$$

所以 A,D,F,G 四点共圆，所以 $\angle AGD=\angle AFD$.

同理可证 A,B,E,G 四点共圆，所以 $\angle AGB=\angle AEB$. 所以

$$\angle AFD+\angle AEB=\angle AGD+\angle AGB=\pi$$

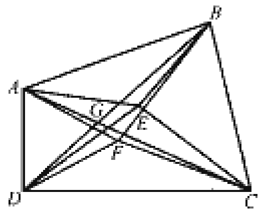


图 28

24 给定正$\triangle ABC$，D是BC边上任意一点，$\triangle ABD$的外心、内心分别为O_1，I_1，$\triangle ADC$的外心、内心分别为O_2，I_2，直线O_1I_1与O_2I_2相交于P．试求：当点D在BC边上运动时，点P的轨迹．

（第42届国际数学奥林匹克中国国家队选拔赛试题）

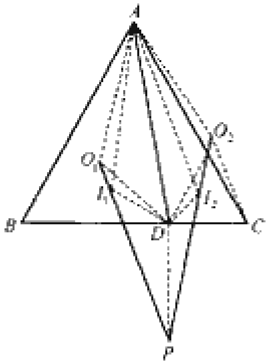


图 29

解 如图29，联结AO_i，AI_i（$i=1,2$）．联结DO_i，DI_i（$i=1,2$），联结PD，则已证$\angle AO_iD=\angle AI_jD=120°$（$i,j=1,2$）．所以$A$，$O_i$，$I_i$，$D$共圆（$i=1,2$），所以

$$\angle O_1PO_2=\angle O_1I_1D+\angle O_2I_2D-\angle I_1DP-\angle I_2DP=360°-\angle O_1AD-\angle O_2AD-270°=30°$$

而
$$\angle O_1DO_2=60°=2\angle O_1PO_2$$

且
$$O_1D=\frac{1}{\sqrt{3}}AD=O_2D$$

所以D为$\triangle PO_1O_2$外心，$PD=\dfrac{1}{\sqrt{3}}AD$，所以

$$\angle PDB=\angle PDO_1-\angle O_1DB=180°-2\angle DO_1I_1-\angle O_1DB=180°-2\angle I_1AD-\angle BDO_1=90°$$

所以$PD\perp BC$．

现以BC边中点O为原点，BC边所在直线为x轴，建立平面直角坐标系，不妨设正$\triangle ABC$边长为2，点$P(x,y)$，$A(0,\sqrt{3})$，则由

$$AD^2-OD^2=OA^2$$

有
$$(\sqrt{3}y)^2-x^2=(\sqrt{3})^2$$

所以P的轨迹为双曲线$y^2-\dfrac{x^2}{3}=1$的下支在$x\in(-1,1)$中的一段．

25 设锐角$\triangle ABC$的外心为O，从A作BC的高，垂足为P，且$\angle BCA\geqslant\angle ABC+30°$．证明：$\angle CAB+\angle COP<90°$．

（第42届国际数学奥林匹克）

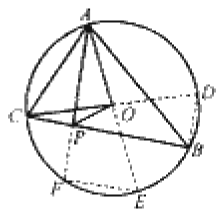


图 30

证法1 如图30，延长CO，AO，AP分别交圆O于D，E，F，联结EF，BD．则

$$\angle E=\angle CAP+\angle ABC=90°-\angle ACB+\angle ABP$$

故
$$\angle OAP=90°-E=\angle ACB-\angle ABP$$

设圆O的半径为R．因为

$$CP=2R\cdot\sin B\cdot\cos C,\ AP=2R\cdot\sin B\cdot\sin C$$

所以 $OP^2 = AP^2 + OA^2 - 2OA \cdot AP \cdot \cos\angle OAP =$
$4R^2 \cdot \sin^2 B \cdot \sin C + R^2 -$
$4R^2 \cdot \sin B \cdot \sin C \cdot \cos(C-B) =$
$4R^2[\sin^2 B \cdot \sin^2 C + \frac{1}{4} - \sin^2 B \cdot \sin^2 C -$
$\sin B \cdot \cos B \cdot \sin C \cdot \cos C] =$
$4R^2\left(\frac{1}{4} - \sin B \cdot \cos B \cdot \sin C \cdot \cos C\right)$

所以 $OP^2 - CP^2 = 4R^2\left[\frac{1}{4} - \sin B \cdot \cos C \cdot \sin(B+C)\right] =$
$4R^2\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sin^2 A + \frac{1}{2}\sin A \cdot \sin(C-B)\right]$

因为 $\angle C - \angle B \geqslant 30^\circ$，且 $\angle C$，$\angle B$ 都为锐角，所以

$$OP^2 - CP^2 \geqslant 4R^2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\sin^2 A + \frac{1}{4}\sin A\right) =$$
$$R^2(2\sin A + 1)(1 - \sin A) > 0$$

所以 $OP^2 > CP^2 \Rightarrow OP > CP$

有 $\angle COP < \angle OCP$. 故

$$\angle COP + \angle CAB < \angle OCP + \angle D = 90^\circ$$

证法 2 如图31，据题意有

$$\alpha+\beta, \beta+\gamma, \alpha+\gamma \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

且

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2} \quad ①$$

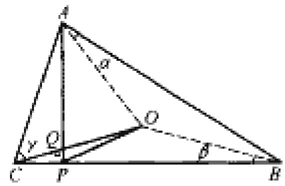


图 31

因为 $\angle BCA \geqslant \angle ABC + 30^\circ$，所以

$$\beta + \gamma \geqslant \alpha + \beta + 30^\circ \Rightarrow \gamma - \alpha \geqslant \frac{\pi}{6} \quad ②$$

注意到

$$\angle CAB + \angle OCB = \frac{1}{2}\angle COB + \frac{1}{2}(\angle OCB + \angle OBC) = \frac{\pi}{2}$$

作 $PQ \perp OC$ 于 Q，要证 $\angle CAB + \angle COP < \frac{\pi}{2}$，仅需证

$$\angle COP < \angle OCP \Leftarrow PC < PO \Leftarrow CQ < OQ \Leftarrow CQ < \frac{1}{2}CO$$

设 $\triangle ABC$ 外接圆圆 O 半径为 R，则有

$$AC = 2R \cdot \sin(\alpha+\beta)$$
$$PC = AC \cdot \cos(\beta+\gamma) = 2R \cdot \sin(\alpha+\beta) \cdot \cos(\beta+\gamma)$$
$$QC = PC \cdot \cos\beta = 2R \cdot \sin(\alpha+\beta) \cdot \cos(\beta+\gamma) \cdot \cos\beta =$$
$$R[\sin(\alpha+\beta+\gamma+\beta) + \sin(\alpha-\gamma)]\cos\beta =$$
$$R[\cos\beta - \sin(\gamma-\alpha)]\cos\beta$$

由式①,②可知,$\beta\in(0,\frac{\pi}{3})$,有 $\cos\beta\in(\frac{1}{2},1)$.则

$$QC\leqslant R\left[\cos\beta-\sin\frac{\pi}{6}\right]\cos\beta=R\left[\left(\cos\beta-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{4^2}\right]<$$
$$R\left(\frac{3^2}{4^2}-\frac{1}{4^2}\right)=\frac{1}{2}R=\frac{1}{2}OC$$

证法3 如图32,过点 O 作 BC 的垂线,垂足为 D.因为

$$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC=\angle DOC$$

所以 $$\frac{\pi}{2}-\angle BAC=\frac{\pi}{2}-\angle DOC=\angle OCD$$

则只须证 $$\angle COP<\angle OCD\Leftarrow PC<OP$$

以 O 为原点,OD 所在直线为 y 轴,过点 O 且平行于 BC 的直线为 x 轴建立直角坐标系.设 $\angle AOx=\alpha$,$\angle xOC=\beta$,且 $0<\beta<\alpha<\frac{\pi}{2}$,其外接圆半径为 R.有 $P(R\cdot\cos\alpha,-R\cdot\sin\beta)$,$C(R\cdot\cos\beta,-R\cdot\sin\beta)$.则

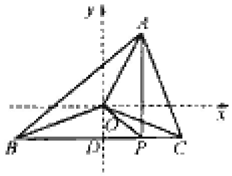


图 32

$$|PC|=R(\cos\beta-\cos\alpha),|PO|=R\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\beta}$$

所以 $|PC|^2-|PO|^2=R^2(2\cos^2\beta-2\cos\beta\cdot\cos\alpha-1)$

因为 $$\angle ABO=\frac{\alpha-\beta}{2},\angle ACO=\frac{\pi-\alpha-\beta}{2}$$

且 $$\angle ACB-\angle ABC=\angle ACO-\angle ABO\geqslant\frac{\pi}{6}$$

所以 $$\frac{\pi-\alpha-\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}\geqslant\frac{\pi}{6}$$

即 $\alpha\leqslant\frac{\pi}{3}$.所以 $-\cos\alpha\leqslant-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.则

$$|PC|^2-|PO|^2\leqslant R^2(2\cos^2\beta-\cos\beta-1)=$$
$$R^2(2\cos\beta+1)(\cos\beta-1)$$

因为 $0<\cos\beta<1$,所以

$$2\cos\beta+1>0,\cos\beta-1<0.$$

故 $|PC|^2-|PO|^2<0$,即 $|PC|<|PO|$.

㉑ 设点 I,H 分别为锐角 $\triangle ABC$ 的内心和垂心,点 B_1,C_1 分别为 AC,AB 的中点.已知射线 B_1I 交边 AB 于点 $B_2(B_2\neq B)$,射线 C_1I 交 AC 的延长线于点 C_2,B_2C_2 与 BC 相交于 K,A_1 为 $\triangle BHC$ 的外心.试证:A,I,A_1 三点共线的充分必要条件是 $\triangle BKB_2$ 和 $\triangle CKC_2$ 的面积相等.

(2003 年中国数学冬令营)

证明 首先,证明 A,I,A_1 三点共线 $\Leftrightarrow\angle BAC=60^\circ$.

如图 33,设 O 为 $\triangle ABC$ 的外心,联结 BO,CO,则

$$\angle BHC = 180° - \angle BAC$$

$$\angle BA_1C = 2(180° - \angle BHC) = 2\angle BAC$$

因此

$\angle BAC = 60° \Leftrightarrow \angle BAC + \angle BA_1C = 180° \Leftrightarrow$

A_1 在 $\triangle ABC$ 的外接圆圆 O 上 $\Leftrightarrow$

AI 与 AA_1 重合(因为 A_1 在 BC 的中垂线上)$\Leftrightarrow$

A, I, A_1 三点共线

再证 $S_{\triangle BKB_2} = S_{\triangle CKC_2} \Leftrightarrow \angle BAC = 60°$.

作 $IP \perp AB$ 于点 P, $IQ \perp AC$ 于点 Q,则

$$S_{\triangle AB_1B_2} = \frac{1}{2}IP \cdot AB_2 + \frac{1}{2}IQ \cdot AB_1$$

又注意到 $$S_{\triangle AB_1B_2} = \frac{1}{2}AB_1 \cdot AB_2 \cdot \sin A$$

所以 $$IP \cdot AB_2 + IQ \cdot AB_1 = AB_1 \cdot AB_2 \cdot \sin A$$

设 $IP = r$(r 为 $\triangle ABC$ 的内切圆半径),则 $IQ = r$. 又令 $BC = a, CA = b, AB = c$,则 $r = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}$. 又由

$$AB_1 = \frac{b}{2}, 2AB_1 \cdot \sin A = h_c = \frac{2S_{\triangle ABC}}{c}$$

有 $$AB_2\left(\frac{2S_{\triangle ABC}}{c} - 2 \cdot \frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}\right) = b \cdot \frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}$$

则 $$AB_2 = \frac{bc}{a+b-c}$$

同理 $$AC_2 = \frac{bc}{a+c-b}$$

因此 $$S_{\triangle BKB_2} = S_{\triangle CKC_2} \Leftrightarrow S_{\triangle ABC} = S_{\triangle AB_2C_2} \Leftrightarrow$$

$$bc = \frac{bc}{a+b-c} \cdot \frac{bc}{a+c-b} \Leftrightarrow$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc \Leftrightarrow$$

$$\angle BAC = 60°\text{(由余弦定理)}$$

所以命题成立.

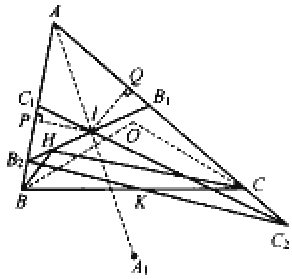


图 33

27 锐角 $\triangle ABC$ 有三条高分别为 AD, BE, CF,求证:$\triangle DEF$ 的周长不超过 $\triangle ABC$ 周长的一半.

(2002 年中国女子数学奥林匹克)

分析 要证明

$$DE + EF + DF \leqslant \frac{1}{2}(AB + BC + CA)$$

只须证明

$$DE + DF \leqslant BC, EF + DF \leqslant AB, EF + DE \leqslant AC$$

证明 如图 34,因为 $\angle ADB = \angle AEB = 90°$,所以 A,B,D,E 四点共圆,且 AB 为直径,于是由正弦定理可得

$$\frac{DE}{\sin\angle DAE} = AB = c$$

所以 $$DE = c\cdot\sin\angle DAE$$

又 $\angle DAC + \angle DCA = 90°$,所以

$$DE = c\cdot\cos C$$

同理 $$DF = b\cdot\cos B$$

所以 $$DE + DF = c\cdot\cos C + b\cdot\cos B =$$
$$(2R\cdot\sin C)\cos C + (2R\cdot\sin B)\cos B =$$
$$R(\sin 2C + \sin 2B) =$$
$$2R\cdot\sin(B+C)\cdot\cos(B-C) =$$
$$2R\cdot\sin A\cdot\cos(B-C) =$$
$$a\cdot\cos(B-C)\leqslant a(R\text{ 为 }\triangle ABC\text{ 外接圆半径})$$

即 $$DE + DF \leqslant a$$

同理 $$DE + EF \leqslant b, EF + DF \leqslant c$$

所以 $$DE + DF + EF \leqslant \frac{1}{2}(a+b+c)$$

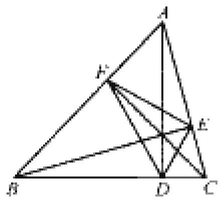


图 34

㉘ 凸四边形 $ABCD$ 的对角线交于点 M,点 P,Q 分别是 $\triangle AMD$ 和 $\triangle CMB$ 的重心,R,S 分别是 $\triangle DMC$ 和 $\triangle MAB$ 的重心.求证:$PQ\perp RS$.

(2003 年中国国家集训队训练题)

证法 1 如图35,作 $\square AMDX$ 与 $\square CMBY$,联结 $MX,MY;SA,SB,SX,SY;RC,RD,RX,RY$.

由重心的性质知 P 在 MX 上且 $MP=\frac{1}{3}MX$,Q 在 MY 上且 $MQ=\frac{1}{3}MY$,所以 $PQ\ /\!/\ XY$ 或 P,Q,X,Y 四点共线.

又因为 R 是 $\triangle CDM$ 的重心,故 $DR\perp CM$,结合 $DX\ /\!/\ CM$,可知 $DR\perp DX$,同理 $CR\perp CY$,$AS\perp AX$,$BS\perp BY$.所以

$$(SX^2+RY)^2-(RX^2+SY^2)=(AS^2+AX^2+CR^2+CY^2)-$$
$$(DR^2+DX^2+SB^2+BY^2)=$$
$$(AS^2+BM^2-BS^2-AM^2)+$$
$$(CR^2+DM^2-DR^2-CM^2)=0$$

于是 $$SX^2+RY^2=RX^2+SY^2$$

故 $$RS\perp XY, RS\perp PQ$$

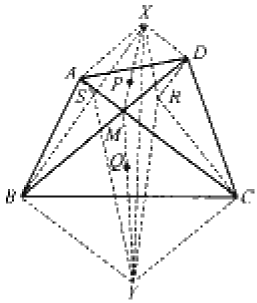


图 35

证法 2 以任意点 O 为原点,利用向量证明.

$$\overrightarrow{SR}\cdot\overrightarrow{PQ}=(\overrightarrow{SM}+\overrightarrow{MR})\cdot(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP})=$$
$$(\overrightarrow{SM}+\overrightarrow{MR})\cdot\frac{1}{3}\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OM})=$$
$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{SM}+\overrightarrow{MR})(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})=$$
$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{MR}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MR}\cdot\overrightarrow{DC})=$$
$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{MR}\cdot\overrightarrow{AB})=$$
$$\frac{1}{3}[|SM|\cdot|DC|\cdot\cos(\frac{3}{2}\pi-\angle ADC-\angle DAB)+$$
$$|MR|\cdot|AB|\cdot\cos(\angle ADC+\angle DAB-\frac{\pi}{2})]=$$
$$\frac{1}{3}(|AB|\cdot\cot\angle AMB\cdot|DC|-\cot\angle DMC\cdot|CD|\cdot$$
$$|AB|)\cos(\frac{3}{2}\pi-\angle ADC-\angle DAB)=0$$

所以，命题成立．

29 设 D,E,F 分别为 $\triangle ABC$ 的边 BC,CA,AB 上的点，$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 分别是 $\triangle AEF,\triangle BFD,\triangle CDE$ 和 $\triangle DEF$ 的面积．求证：$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}\geqslant\frac{3}{\delta^2}$．

（2003 年中国国家集训队训练题）

证明 不妨设 $\triangle ABC$ 面积为 1，且 $x=\frac{AF}{AB},y=\frac{BD}{BC},z=\frac{CE}{CA}$，则由正弦定理有

$$\alpha=\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{\frac{1}{2}AE\cdot AF\cdot\sin\angle EAF}{\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC}=\frac{AE\cdot AF}{AB\cdot AC}=x(1-z)$$

同理 $\beta=y(1-x),\gamma=z(1-y)$

所以 $\delta=1-(\alpha+\beta+\gamma)=1-[x(1-z)+y(1-x)+z(1-y)]=1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)$

从而

$$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}\geqslant\frac{3}{\delta^2}\Leftrightarrow\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}\geqslant\frac{3}{\delta^2}\Leftrightarrow\delta^2(1-\delta)\geqslant3\alpha\beta\gamma\Leftrightarrow$$
$$[1-(x+y+z)+(xy+yz+zx)]^2[(x+y+z)-(xy+yz+zx)]\geqslant$$
$$3xyz(1-x)(1-y)(1-z) \quad ①$$

为证明上式成立，我们记

$$s = xyz, t = (1-x)(1-y)(1-z)$$

则 $$s + t = 1 - (x+y+z) + (xy+yz+zx)$$

因此 不等式①$\Leftrightarrow (s+t)^2(1-s-t) \geqslant 3st \Leftrightarrow$

$$(s+t)^2 - (s+t)^3 \geqslant 3st \Leftrightarrow$$

$$s^2 - st + t^2 \geqslant (s+t)^3$$

注意到

$$\sqrt[3]{s} + \sqrt[3]{t} \leqslant \frac{x+y+z}{3} + \frac{(1-x)+(1-y)+(1-z)}{3} = 1$$

故$(\sqrt[3]{s}+\sqrt[3]{t})^3 \leqslant 1$,即 $s+t+3\sqrt[3]{st}(\sqrt[3]{s}+\sqrt[3]{t}) \leqslant 1$,所以 $s+t+6\sqrt{st} \leqslant 1$,进而为证明

$$s^2 - st + t^2 \geqslant (s+t)^3$$

我们只须证明

$$(s^2 - st + t^2)(s + t + 6\sqrt{st}) \geqslant (s+t)^3 \quad ②$$

不等式②$\Leftrightarrow (s^3+t^3) + 6\sqrt{st}(s^2-st+t^2) \geqslant (s+t)^3 \Leftrightarrow$

$$6\sqrt{st}(s^2-st+t^2) \geqslant 3st(s+t) \Leftrightarrow$$

$$2(s^2-st+t^2) \geqslant \sqrt{st}(s+t) \Leftrightarrow$$

$$2(s^2+t^2) \geqslant \sqrt{st}(\sqrt{s}+\sqrt{t})^2$$

而 $$2(s^2+t^2) \geqslant (s+t)^2 \geqslant 2\sqrt{st}(s+t) = \sqrt{st}\cdot 2(s+t) \geqslant \sqrt{st}(\sqrt{s}+\sqrt{t})^2$$

最后一式成立,从而命题成立,证毕.

30 在给定梯形 $ABCD$ 中,$AD // BC$,E 是 AB 边上的动点,O_1,O_2 分别是$\triangle AED$ 和$\triangle BEC$ 的外心.求证:O_1O_2 的长为一定值.

(2002 年中国西部数学奥林匹克)

证明 如图 36,联结 EO_1,EO_2,则

$$\angle AEO_1 = 90° - \angle ADE, \angle BEO_2 = 90° - \angle BCE$$

于是 $$\angle O_1EO_2 = \angle ADE + \angle ECB$$

由于 $AD // BC$,过 E 作 AD 的平行线可证出$\angle DEC = \angle ADE + \angle BCE$.所以$\angle O_1EO_2 = \angle DEC$.

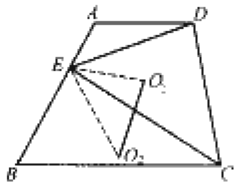


图 36

又由正弦定理,可知

$$\frac{DE}{EC} = \frac{2O_1E\cdot\sin A}{2O_2E\cdot\sin B} = \frac{O_1E}{O_2E}$$

从而,$\triangle DEC \backsim \triangle O_1EO_2$.所以

$$\frac{O_1O_2}{DC} = \frac{O_1E}{DE} = \frac{O_1E}{2O_1E\cdot\sin A} = \frac{1}{2\sin A}$$

故 $O_1O_2=\frac{DC}{2\sin A}$ 为定值.命题获证.

注 一个自然的想法是 O_1,O_2 到 AB 的射影之间的距离为 $\frac{1}{2}AB$ 是定值，于是只须证明 O_1O_2 与 AB 的夹角为定值.这是另一个证明方法的出发点，请读者试证.

31 设一个凸 n 边形没有两条边互相平行.求证：过其内部一点 O 平分该 n 边形的面积的直线至多 n 条.

(2003 年中国国家集训队训练题)

证明 若一条过 O 的直线交凸 n 边形于 A,B，使得 $OA=OB$，则称该直线为好直线.假设共作出了 k 条好直线.

设其中一条好直线交 n 边形于 A_1,B_1，将它以 O 为中心，顺时针旋转，使其与其他好直线重合，分别与 n 边形的边依次交于点 $A_2,B_2;A_3,B_3;\cdots;A_k,B_k$.再令 $A_{k+1}=A_1,B_{k+1}=B_1$(图 37).

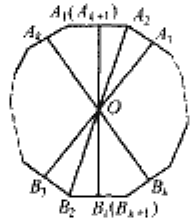


图 37

我们先证明对于 $1\leqslant l\leqslant k$，在两个角 $\angle A_lOA_{l+1}$ 与 $\angle B_lOB_{l+1}$ 中，至少有一个的内部包含原 n 边形的一个顶点.

事实上，若否，则 A_lA_{l+1} 与 B_lB_{l+1} 均为原 n 边形的某条边的一部分.由 $OA_l=OB_l$ 及 $A_{l+1}O=B_{l+1}O$，可知 $A_lA_{l+1}\mathbin{/\!/}B_lB_{l+1}$(图 38)，这与条件矛盾！

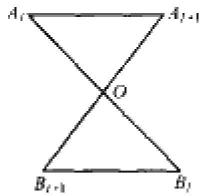


图 38

上述结论表明凸 n 边形至少有 k 个顶点，从而 $k\leqslant n$.

然后证明将直线 $A_iB_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 以 O 为中心顺时针旋转到 $A_{i+1}B_{i+1}$ 的过程中(包括起，终点)至多有一个时刻，使这条直线平分该 n 边形面积.

若不然，如图 39，不妨设有直线 PQ,RS 均平分此 n 边形面积(P,Q,R,S 为直线与凸 n 边形的交点)，我们把折线 B_iB_{i+1} 与 OB_i,OB_{i+1} 所围成的部分以 O 为中心旋转 $180°$，设 S,Q 分别转到 S',Q'.

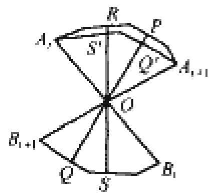


图 39

由 A_iB_i 及 $A_{i+1}B_{i+1}$ 的取法知：由折线 A_iS' 与 $S'A_{i+1}$ 组成的折线与由折线 A_iR 与 RA_{i+1} 组成的折线除端点外，没有其他交点，因此可设是如图所示的情形，也就是说在 $\angle A_iOA_{i+1}$ 内任作一射线分别交两折线于点 C 和 D，都有 $OC<OD$.

因此由 OS',OQ' 和折线 $S'Q'$ 围成的图形面积小于由 OP,OR 和折线 PR 围成的图形面积，即由 OS,OQ 及折线 SQ 围成的图形面积小于由 OP,OR 及折线 PR 围成的图形面积.这与 PQ,RS 同时平分 n 边形面积矛盾！

综上可知，过点 O 平分该 n 边形面积的直线至多 k 条.结合 $k\leqslant n$，得结论：过点 O 平分该 n 边形面积的直线至多 n 条.

32 $\triangle ABC$ 中，$AC > AB$. P 为 BC 的垂直平分线和 $\angle A$ 的内角平分线的交点，作 $PX \perp AB$，交 AB 的延长线于点 X，$PY \perp AC$，交 AC 于点 Y，Z 为 XY 和 BC 的交点. 求 $\frac{BZ}{ZC}$ 的值.

（2003 年中国国家集训队训练题）

解法 1 作 $\triangle ABC$ 外接圆圆 O，记 $\overset{\frown}{BC}$（不包含 A 的一部分）的中点为 D，弦 BC 的中点为 M，如图 40 所示.

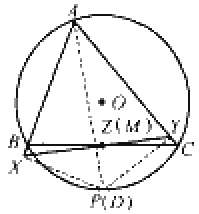


图 40

因为 $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD}$，故 $BD = DC$，$\angle BAD = \angle CAD$，且 D 在 $\angle BAC$ 的内角平分线及 BC 的垂直平分线上.

又因为 $AC > AB$，所以 $\angle BAC$ 的内角平分线与 BC 的垂直平分线不重合，从而它们至多有一个交点，故点 D 与点 P 重合.

所以 $DM \perp BC$，$DX \perp AB$，$DY \perp AC$，且 A, B, C, D 共圆，因此 X, M, Y 三点共线（西姆松定理），即 M 为 BC 与 XY 的交点.

又 BC 与 XY 不重合，它们至多一个交点，故 M 与 Z 重合，因此

$$\frac{BZ}{ZC} = \frac{BM}{MC} = 1$$

解法 2 如图41，联结 BP，CP. 因为 P 在 BC 的垂直平分线上，所以 $BP = CP$.

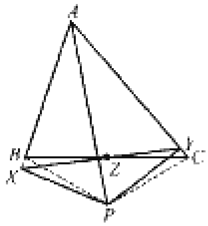


图 41

因为 P 在 $\angle BAC$ 平分线上，所以 $PX = PY$，$AX = AY$，$\triangle BPX \cong \triangle CPY$，因此 $BX = CY$.

视 XZY 为 $\triangle ABC$ 的截线，由梅氏定理有

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BZ}{ZC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$$

又 $AX = AY$，$BX = CY$，所以 $\frac{BZ}{ZC} = 1$.

33 设 D 为 $\triangle ABC$ 的边 AC 上一点，E 和 F 分别为线段 BD 和 BC 上的点. 满足 $\angle BAE = \angle CAF$. 再设 P，Q 为线段 BC 和 BD 上的点，使得 $EP \parallel QF \parallel DC$. 求证：$\angle BAP = \angle QAC$.

（2003 中国国家集训队训练题）

证明 如图 42，作 $\angle CAQ' = \angle BAP$ 交 BD 于 Q'，连 $Q'F$，则

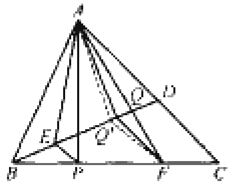


图 42

$$\frac{BE}{ED} = \frac{AB}{AD} \cdot \frac{\sin \angle BAE}{\sin \angle DAE}$$

$$\frac{BF}{FC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \angle BAF}{\sin \angle CAF}$$

因为 $\angle BAE = \angle CAF$，所以 $\angle DAE = \angle BAF$，两式相乘得

$$\frac{BE}{ED}\cdot\frac{BF}{FC}=\frac{AB^2}{AD\cdot AC}$$

同理
$$\frac{BP}{PC}\cdot\frac{BQ'}{Q'D}=\frac{AB^2}{AD\cdot AC}$$

所以
$$\frac{BE}{ED}\cdot\frac{BF}{FC}=\frac{BP}{PC}\cdot\frac{BQ'}{Q'D}$$

又 $EP\,/\!/\,DC$，所以$\frac{BE}{ED}=\frac{BP}{PC}$，故$\frac{BF}{FC}=\frac{BQ'}{Q'D}$，因此 $FQ'\,/\!/\,DC$，所以 $Q'=Q$，$\angle BAP=\angle CAQ$，证毕.

34 已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点 A,B,C 分别在锐角 $\triangle A_1B_1C_1$ 的边 B_1C_1,C_1A_1,A_1B_1 上，使得 $\angle ABC=\angle A_1B_1C_1$，$\angle BCA=\angle B_1C_1A_1$，$\angle CAB=\angle C_1A_1B_1$. 求证：$\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 的垂心到 $\triangle ABC$ 的外心距离相等.

（2003 年中国国家集训队训练题）

证明　先证明一个引理：如图 43，在非等边 $\triangle PQR$ 中，X,Y,Z 分别是 QR,RP,PQ 的中点，$\triangle PQR$ 的垂心是 H，外心是 M，$\triangle XYZ$ 的外心是 O，则 $\triangle XYZ$ 的垂心也是 M，并且 O 为 MH 的中点.

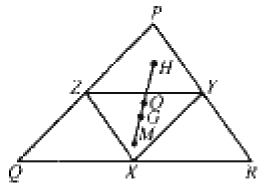


图 43

引理的证明：联结 PX,QY,RZ 交于点 G，则 G 为 $\triangle PQR$ 与 $\triangle XYZ$ 之重心.

因为
$$PG:GX=QG:GY=RG:GZ=2:1$$
所以 $\triangle PQR$ 与 $\triangle XYZ$ 是以 G 为位似中心，且位似比为 $-2:1$ 的位似形.

因为 $MP=MQ$，所以 $MZ\perp PQ$，因此 $MZ\perp XY$. 同理 $MY\perp XZ$，所以 M 为 $\triangle XYZ$ 的垂心.

由位似性质知 $MG=2GO$ 且 G 在线段 MO 上，$HG=2GM$ 且 G 在线段 MH 上. 所以 O 为 MH 之中点. 引理证毕（由于 $\triangle PQR$ 非等边，故 H,G,M,O 四点彼此不同）.

下面回到原题.

若 $\triangle A_1B_1C_1$ 为等边三角形，则如图 44，由 $\angle ACB=60°$ 知
$$\angle A_1CB+\angle B_1CA=120°=180°-60°=\angle A_1CB+A_1BC$$
所以 $\angle A_1BC=\angle B_1CA$，同理 $\angle A_1CB=\angle B_1AC$. 又 $BC=AC$，所以 $\triangle A_1BC\cong\triangle B_1CA$，同理有 $\triangle A_1BC\cong\triangle B_1CA\cong\triangle C_1AB$，所以 $A_1B=B_1C=C_1A$.

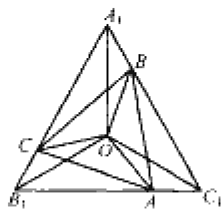


图 44

设$\triangle A_1B_1C_1$中心为O，则$A_1O=B_1O=C_1O$，且$\angle CB_1O=\angle AC_1O=\angle BA_1O=30°$，故$\triangle A_1BO\cong\triangle B_1CO\cong C_1AO$，从而$AO=BO=CO$，即$O$为$\triangle ABC$之中心．于是$\triangle ABC$和$\triangle A_1B_1C_1$的垂心以及$\triangle ABC$的外心均为$O$，此时结论成立．

以下不妨设$\triangle A_1B_1C_1$不是等边三角形．

作$\triangle A_2B_2C_2$使A,B,C分别是B_2C_2,C_2A_2,A_2B_2的中点．若$\triangle A_1B_1C_1$与$\triangle A_2B_2C_2$重合，则由引理知结论已然成立．若不然，如图45，设$\triangle A_2B_2C_2$的垂心为H，外心为M，$\triangle ABC$的外心是O，$\triangle A_1B_1C_1$的垂心是K．由引理知，O为MH的中点，M是$\triangle ABC$的重心．

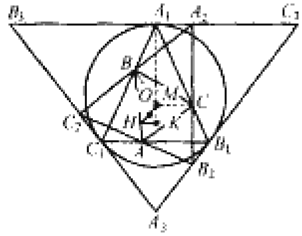


图45

设由直线A_1A_2,B_1B_2,C_1C_2围成的三角形为$\triangle A_3B_3C_3$，联结MB,MC,MA_1．

因为

$$\angle BMC=\pi-\angle BAC=\pi-\angle BA_1C$$

所以B,M,C,A_1四点共圆，因此$\angle MA_1C=\angle MBC$．同理$\angle MB_1C=\angle MAC$，又$\angle MAC=\angle MBC$，所以

$$\angle MA_1C=\angle MB_1C,MA_1=MB_1$$

同理有$MA_1=MB_1=MC_1$，即M为$\triangle A_1B_1C_1$的外心．

因为

$$\angle BA_1C=\angle BAC=\angle BA_2C$$

所以B,A_1,A_2,C四点共圆，于是$\angle C_3A_1C=\angle A_2BC$，同理$\angle C_3B_1C=\angle B_2AC$，又$\angle A_2BC=\angle B_2AC=\angle A_2C_2B_2$，所以

$$\angle C_3A_1C=\angle C_3B_1C,A_1C_3=B_1C_3$$

同理$A_1B_3=C_1B_3,B_1A_3=C_1A_3$，所以$A_1,B_1,C_1$为$\triangle A_3B_3C_3$内切圆在三边上的切点，$\triangle A_1B_1C_1$的外接圆就是$\triangle A_3B_3C_3$的内切圆，所以

$$MA_1\perp A_1A_2,MB_1\perp B_1B_2,MC_1\perp C_1C_2$$

又因为$MA_2=MB_2=MC_2$，所以$A_1A_2=B_1B_2=C_1C_2$且$\angle A_1MA_2=\angle B_1MB_2=\angle C_1MC_2$，因此$\triangle A_1B_1C_1$与$\triangle A_2B_2C_2$是以$M$为中心的旋转相似形．所以

$$\triangle MKH\backsim\triangle MA_1A_2,\angle MKH=\angle MA_1A_2=\frac{\pi}{2},MK\perp KH$$

所以$OM=OK$．证毕．

㉛ 设 $\triangle ABC$ 的三边 a,b,c 上对应的中线为 m_a,m_b,m_c，内角平分线为 w_a,w_b,w_c，且 $w_a\cap m_b=P$，$w_b\cap m_c=Q$，$w_c\cap m_a=R$．记 $\triangle PQR$ 的面积为 δ，$\triangle ABC$ 的面积为 F．求使不等式 $\frac{\delta}{F}<\lambda$ 成立的最小正常数 λ．

（2003 年中国国家集训队测试题第 1 次）

解　不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，设 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，则易知 P 在 BG 上，R 在 AG 上，Q 在 CG 的延长线上．设 BC 的中点为 D，AP 与 BC 交于 E，如图1.46，则由内角平分线定理得 $\frac{BE}{ED}=\frac{2c}{b-c}$．

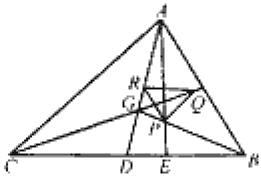


图 46

对 $\triangle GBD$ 和截线 APE 用梅涅劳斯定理可得

$$\frac{GP}{PB}\cdot\frac{BE}{ED}\cdot\frac{DA}{AG}=1$$

故 $\frac{GP}{GB}=\frac{b-c}{b+2c}$，同理 $\frac{GQ}{GC}=\frac{a-c}{c+2a}$，又注意到面积之间的关系 $F=3S_{\triangle GBC}$，可知

$$\frac{S_{\triangle GPQ}}{F}=\frac{1}{3}\cdot\frac{GP\cdot GQ}{GB\cdot GC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{(b-c)(a-c)}{(b+2c)(c+2a)}$$

同理可得
$$\frac{S_{\triangle GRQ}}{F}=\frac{1}{3}\cdot\frac{(a-b)(a-c)}{(a+2b)(c+2a)}$$
$$\frac{S_{\triangle GPR}}{F}=\frac{1}{3}\cdot\frac{(a-b)(b-c)}{(a+2b)(b+2c)}$$

因此

$$\frac{\delta}{F}=\frac{S_{\triangle GPQ}+S_{\triangle GQR}-S_{\triangle GPR}}{F}=\frac{ab^2+bc^2+ca^2-3abc}{(a+2b)(b+2c)(c+2a)}$$

记
$$f(a,b,c)=\frac{ab^2+bc^2+ca^2-3abc}{(a+2b)(b+2c)(c+2a)}$$

现令 $a=b=1$，$c\to0$，则得 $f(a,b,c)\to\frac{1}{6}$．下证

$$f(a,b,c)<\frac{1}{6} \qquad ①$$

通过恒等变形易知①等价于

$$2\mid(a-b)(b-c)(c-a)\mid<27abc$$

这是明显成立的（因为 $2\mid(a-b)(b-c)(c-a)\mid<2cab<27abc$）．

综上所述，所求的最小正常数为 $\frac{1}{6}$．

㊱(1) 设 D 为 $\triangle ABC$ 内任一点,求证:

$$\frac{BC}{\min\{AD, BD, CD\}} \geqslant \begin{cases} 2\sin A & ,\angle A < 90^\circ \\ 2 & ,\angle A \geqslant 90^\circ \end{cases}$$

(2) 设 E 为凸四边形 $ABCD$ 内任一点,A,B,C,D,E 五点中任意两点间的最大距离与最小距离之比记为 k,求证:$k \geqslant 2\sin 70^\circ$. 并说明等号能否成立.

(2003 年中国国家集训队测试题第 6 次)

证明 先证明一个引理:在 $\triangle ABC$ 中

$$\frac{BC}{\min\{AB, AC\}} \geqslant 2\sin\frac{A}{2}$$

引理的证明:作 $\angle A$ 的平分线 AT,过点 B,C 分别作 AT 的垂线,垂足分别为 D,E(图 47),则

$$BC = BT + TC \geqslant BD + CE = AB\cdot\sin\frac{A}{2} + AC\cdot\sin\frac{A}{2} \geqslant 2\min\{AB, AC\}\sin\frac{A}{2}$$

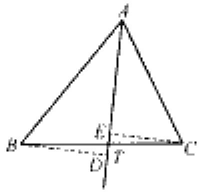


图 47

所以
$$\frac{BC}{\min\{AB, AC\}} \geqslant 2\sin\frac{A}{2}$$

下面回到原题.

(1) 当 $\angle A < 90^\circ$ 时,若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,则外心 O 在 $\triangle ABC$ 内,如图48. 设外接圆半径为 R,且不妨设 D 在 $\triangle AOC$ 内部或边界上,则

$$\min\{AD, BD, CD\} \leqslant \min\{AD, CD\} \leqslant \frac{AD + CD}{2} \leqslant \frac{AO + CO}{2} = R$$

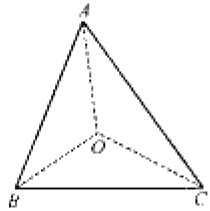


图 48

即
$$\frac{BC}{2\sin A} \geqslant \min\{AD, BD, CD\}$$

故
$$\frac{BC}{\min\{AD, BD, CD\}} \geqslant 2\sin A$$

若 $\triangle ABC$ 为非锐角三角形,不妨设 $\angle B \geqslant 90^\circ$,则外心 O 不在 $\triangle ABC$ 内部,如图 49 所示. 设 BO 交 AC 于点 P,则点 D 必在 $\triangle ABP$ 或 $\triangle BCP$ 中,同上可知

$$\min\{AD, BD, CD\} \leqslant R$$

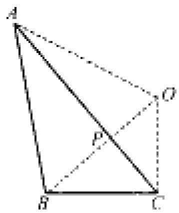


图 49

从而也有

$$\frac{BC}{\min\{AD, BD, CD\}} \geqslant 2\sin A$$

当 $\angle A \geqslant 90^\circ$ 时,设 M 为 BC 中点,则 $AM \leqslant \frac{1}{2}BC$,不妨设点 D 在 $\triangle ABM$ 内或边界上,如图 50 所示,则

$$\min\{AD,BD,CD\}\leqslant\min\{AD,BD\}\leqslant\frac{AD+BD}{2}\leqslant\frac{AM+BM}{2}\leqslant\frac{BC}{2}$$

故
$$\frac{BC}{\min\{AD,BD,CD\}}\geqslant 2$$

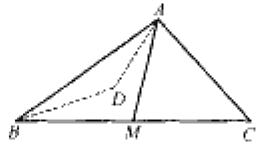


图 50

(2) 如图 51,设 AC 与 BD 交于 F,E 在 $\triangle FAB$ 内,若 $\angle AEC\geqslant 140^\circ$,则

$$k\geqslant\frac{AC}{\min\{AE,EC\}}\geqslant 2\sin\frac{140^\circ}{2}=2\sin 70^\circ$$

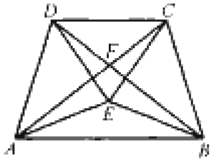


图 51

若 $\angle AEC<140^\circ$,同样 $\angle AEB<140^\circ$,$\angle BED<140^\circ$,于是 $\angle BEC>80^\circ$,$\angle AED>80^\circ$.又由(1)知,若 $\angle ABC\geqslant 70^\circ$ 或 $\angle BAD\geqslant 70^\circ$,则 $k\geqslant 2\sin 70^\circ$,命题已证.故设 $\angle ABC<70^\circ$,$\angle BAD<70^\circ$,于是 $\max\{\angle ADC,\angle BCD\}>110^\circ$,不妨设 $\angle BCD>110^\circ$,于是有(不妨设最短距离为 1)

$$BC\geqslant\frac{BC}{\min\{CE,BE\}}\geqslant 2\sin\frac{\angle CEB}{2}\geqslant 2\sin 40^\circ$$

$$k\geqslant BD\geqslant\sqrt{DC^2+BC^2-2BC\cdot DC\cdot\cos 110^\circ}=$$
$$\sqrt{DC^2+BC^2+2BC\cdot DC\cdot\cos 70^\circ}\geqslant$$
$$\sqrt{1+4\sin^2 40^\circ+4\sin 40^\circ\cdot\cos 70^\circ}=2\sin 70^\circ$$

其中等号是可以成立的,当五个点满足情形:$AE=BE=CE=DE$ 且 $\angle AEB=140^\circ$,$\angle DEA=\angle CEB=80^\circ$ 时.

37 在锐角 $\triangle ABC$ 中,AD 是 $\angle A$ 的内角平分线,点 D 在边 BC 上,过点 D 分别作 $DE\perp AC$,$DF\perp AB$,垂足分别为 E,F,联结 BE,CF,它们相交于点 H,$\triangle AFH$ 的外接圆交 BE 于点 G,求证:线段 BG,GF 和 BF 组成的三角形是直角三角形.

(2003 年中国国家队选拔赛试题)

证明 如图 52,过点 D 作 $DG'\perp BE$,垂足为 G',由勾股定理知

$$BG'^2-G'E^2=BD^2-DE^2=BD^2-DF^2=BF^2$$

所以线段 BG',$G'F$ 和 BF 组成的三角形是以 BG' 为斜边的直角三角形.

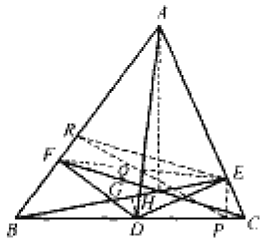


图 52

下证 G' 即为 G,即只须证 A,F,G',H 四点共圆.

联结 EF,则 AD 垂直平分 EF,设 $AD\cap EF=Q$,作 $EP\perp BC$,垂足为 P,联结 PQ,并延长交 AB 于点 R,联结 RE.因为 Q,D,P,E 四点共圆,所以 $\angle QPD=\angle QED$,又 A,F,D,E 四点共圆,所以 $\angle QED=\angle FAD$,于是 A,R,D,P 四点共圆,$\angle ARQ=\angle ADC$,又 $\angle RAQ=\angle DAC$,于是 $\triangle ARQ\backsim\triangle ADC$,$\frac{AR}{AQ}=\frac{AD}{AC}$,所以

$$AR\cdot AC=AQ\cdot AD=AF^2=AF\cdot AE$$

即 $\frac{AR}{AF}=\frac{AE}{AC}$，所以，$RE\ /\!/\ FC$，$\angle AFC=\angle ARE$. 因为 A,R,D,P 四点共圆，又 G',D,P,E 四点共圆，于是

$$BG'\cdot BE=BD\cdot BP=BR\cdot BA$$

故 A,R,G',E 四点共圆，所以 $\angle AG'E=\angle ARE=\angle AFC$，所以 A,F,G',H 四点共圆.

(38) 以 $\triangle ABC$ 的三边向形外分别作正方形 $ABHI$，$BCDE$ 和 $CAFG$. 设 XYZ 是线段 EF，DI 和 GH 围出的三角形. 求证：$S_{\triangle XYZ}\leqslant(4-2\sqrt{3})S_{\triangle ABC}$.

（2003 年中国国家集训队训练题）

证明　如图 53 所示联结辅助线，有 $AH=BI=\sqrt{2}c$，$AG=CF=\sqrt{2}b$，$BD=CE=\sqrt{2}a$（$AB=c$，$BC=a$，$CA=b$），且 $\angle HAG=90°+A$，故

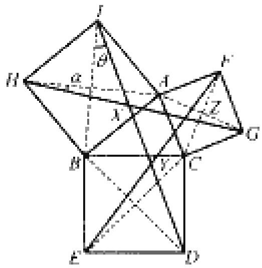


图 53

$$HG=\sqrt{2}\sqrt{b^2+c^2+2bc\cdot\sin A}$$

$$\sin\alpha=\frac{b\cdot\cos A}{\sqrt{b^2+c^2+2bc\cdot\sin A}}$$

$$\cos\alpha=\frac{b\cdot\sin A+C}{\sqrt{b^2+c^2+2bc\cdot\sin A}}$$

类似有

$$\sin\theta=\frac{a\cdot\cos B}{\sqrt{a^2+c^2+2ac\cdot\sin B}}$$

$$\cos\theta=\frac{a\cdot\sin B+c}{\sqrt{a^2+c^2+2ac\cdot\sin B}}$$

从而

$$IX=\frac{HI\cdot\sin(45°+\alpha)}{\cos(\alpha+\theta)}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}c(\sin\alpha+\cos\alpha)}{\cos\alpha\cdot\cos\theta-\sin\alpha\cdot\sin\theta}=$$

$$\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}c(b\cdot\cos A+b\cdot\sin A+c)\sqrt{a^2+c^2+2ac\cdot\sin B}}{ab\cdot\cos C+ac\cdot\sin B+bc\cdot\sin A+c^2}$$

利用余弦定理及面积公式，可知

$$IX=\frac{\sqrt{2}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2}+2\Delta+c^2\right)}{a^2+b^2+c^2+8\Delta}\cdot\sqrt{a^2+c^2+2ac\cdot\sin B}$$

类似地（只须将 a,c 对换），我们可得

$$DY=\frac{\sqrt{2}\left(\frac{b^2+a^2-c^2}{2}+2\Delta+a^2\right)}{a^2+b^2+c^2+8\Delta}\cdot\sqrt{a^2+c^2+2ac\cdot\sin B}$$

其中，$\Delta=S_{\triangle ABC}$. 又

$$DI=\sqrt{2}\sqrt{a^2+c^2+2ac\cdot\sin B}$$

故 $XY=DI-IX-DY=$

$$\sqrt{2}\sqrt{a^2+c^2+2ac\cdot\sin B}\left(1-\frac{a^2+b^2+c^2+4\Delta}{a^2+b^2+c^2+8\Delta}\right)=$$

$$\sqrt{a^2+c^2+2ac\cdot\sin B}\cdot\frac{4\sqrt{2}\Delta}{a^2+b^2+c^2+8\Delta}$$

$$XZ=\sqrt{b^2+c^2+2bc\cdot\sin A}\cdot\frac{4\sqrt{2}\Delta}{a^2+b^2+c^2+8\Delta}$$

同理 $YZ=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cdot\sin C}\cdot\dfrac{4\sqrt{2}\Delta}{a^2+b^2+c^2+8\Delta}$

设以 $\sqrt{a^2+c^2+2ac\cdot\sin B}$，$\sqrt{b^2+c^2+2bc\cdot\sin A}$，$\sqrt{a^2+b^2+2ab\cdot\sin C}$ 为三边的三角形面积为 S，注意到 $4\Delta=2ac\cdot\sin B=2bc\cdot\sin A=2ab\cdot\sin C$。利用海伦公式易得

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+4\Delta(a^2+b^2+c^2)+12\Delta^2}\leqslant$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{3}+4\Delta(a^2+b^2+c^2)+12\Delta^2}=$$

$$\frac{\sqrt{3}}{6}(6\Delta+a^2+b^2+c^2)$$

而 $S_{\triangle XYZ}=\left(\dfrac{4\sqrt{2}\Delta}{a^2+b^2+c^2+8\Delta}\right)^2S\leqslant$

$$\frac{32\Delta^2}{(a^2+b^2+c^2+8\Delta)^2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}(6\Delta+a^2+b^2+c^2)$$

欲证 $S_{\triangle XYZ}\leqslant(4-2\sqrt{3})\Delta$，只须证上式右边小于等于 $(4-2\sqrt{3})\Delta$，即证

$$(2\sqrt{3}-3)(a^2+b^2+c^2)^2-(56-32\sqrt{3})\Delta(a^2+b^2+c^2)-(240-128\sqrt{3})\Delta^2\geqslant 0$$

利用外森比克不等式 $a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}\Delta$，易证上式成立。

综上所述，命题得证。

39 锐角 $\triangle ABC$ 中，$AB\neq AC$，H，G 分别为该三角形的垂心和重心。已知 $\dfrac{1}{S_{\triangle HAB}}+\dfrac{1}{S_{\triangle HAC}}=\dfrac{2}{S_{\triangle HBC}}$，求证：$\angle AGH=90°$。

（2003年中国国家集训队训练题）

证明 如图54，设 AH 交 BC 于 O，以 O 为原点，OC 为 x 轴正方向建立直角坐标系。设 $C(c,0)$，$B(-b,0)$，$A(0,a)$，则易算得 $H\left(0,\dfrac{bc}{a}\right)$，$G\left(\dfrac{c-b}{3},\dfrac{a}{3}\right)$，故

$$\angle AGH = 90° \Leftrightarrow AG \perp GH \Leftrightarrow k_{AG} \cdot k_{GH} = -1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\frac{bc}{a} - \frac{a}{3}}{\frac{b-c}{3}} \cdot \frac{\frac{2a}{3}}{\frac{b-c}{3}} = -1 \Leftrightarrow$$

$$2a^2 = b^2 + 4bc + c^2 \qquad ①$$

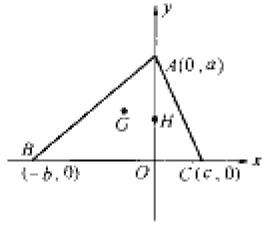


图 54

而

$$S_{\triangle HBC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(b+c)bc}{a}$$

$$S_{\triangle HAB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b(a^2 - bc)}{a}$$

$$S_{\triangle HAC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{c(a^2 - bc)}{a}$$

($\triangle ABC$ 为锐角三角形,所以 $a^2 > bc$)

故

$$\frac{1}{S_{\triangle HAB}} + \frac{1}{S_{\triangle HAC}} = \frac{2}{S_{\triangle HBC}} \Leftrightarrow \frac{2a}{bc(b+c)} =$$

$$\frac{a}{b(a^2 - bc)} + \frac{a}{c(a^2 - bc)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2(a^2 - bc)}{bc(b+c)} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \Leftrightarrow$$

$$2(a^2 - bc) = (b+c)^2 \Leftrightarrow$$

$$2a^2 = b^2 + 4bc + c^2 \qquad ②$$

由 ①,②,即知命题成立.

> **40** 在 $\triangle ABC$ 中是否存在一点 P,使得过点 P 的任意直线都将 $\triangle ABC$ 分成面积相等的两部分?为什么?
>
> (1999 年广西省高中数学竞赛)

解 如图 55,假设存在点 P 满足条件,联结 AP,延长交 BC 于 D,联结 BP,延长交 AC 于 E. 则由 $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD}$ 得 $BD = CD$.

同理可得 $AE = CE$.

于是,P 是 $\triangle ABC$ 的重心. 有 $AP : AD = 2 : 3$.

过 P 作 $GH \parallel BC$,则 $\triangle AGH \backsim \triangle ABC$. 所以

$$\frac{S_{\triangle AGH}}{S_{\triangle ABC}} = \left(\frac{AG}{AB}\right)^2 = \left(\frac{AP}{AD}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

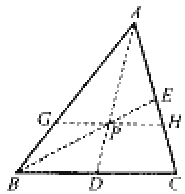


图 55

于是,$S_{\triangle AGH} : S_{四边形BCHG} = 4 : 5$,即 GH 分成的两部分面积不相等. 所以,题目所设条件的点 P 不存在.

> **41** AD, BE, CF 是 $\triangle ABC$ 的高,K, M, N 分别为 $\triangle AEF$, $\triangle BFD$, $\triangle CDE$ 的重心. 求证:$\triangle DEF$ 和 $\triangle KMN$ 是全等三角形.
>
> (2001 年世界城际间联赛)

证明 如图 56,记 $\triangle BFD$ 中 BF 上的高线垂足为 G,$\triangle CDE$

中 CE 上的高线垂足为 H.

因为 $BE\perp AC$,$AD\perp BC$,所以 A,B,D,E 四点共圆.所以

$$\frac{DE}{AB}=\frac{CD}{AC}=\cos C$$

即 $$DE=AB\cdot\cos C$$

同理 $$DF=AC\cdot\cos B$$

因为 $\angle FMG=\angle B$,$\angle BFD=\angle C$,所以

$$FM=\frac{FG}{\sin B}=\frac{DF\cdot\cos C}{\sin B}=\frac{AC\cdot\cos B\cdot\cos C}{\sin B}$$

类似地可推出 $$EN=\frac{AB\cdot\cos C\cdot\cos B}{\sin C}$$

因为 $\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}$,所以 $FM=EN$.因为 $FM\perp BC$,$EN\perp BC$,所以 $FM\parallel EN$.故 $EFMN$ 为平行四边形.有 $EF=MN$.

同理,有 $DE=KM$,$FD=NK$.所以 $\triangle DEF\cong\triangle KMN$.

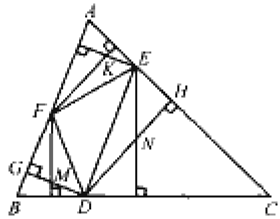


图 56

12 已知过锐角 $\triangle ABC$ 顶点 A,B,C 的高线分别交对边于 D,E,F,$AB>AC$,直线 EF 交 BC 延长线于 P,过点 D 且平行 EF 的直线分别交 AC 延长线和 AB 于 Q,R,N 是 BC 上的一点,且 $\angle NQP+\angle NRP<180^\circ$.求证:$BN>CN$.

(1999 年中国台湾地区高中数学竞赛)

证明 取 BC 中点 M,只须证明 $\angle MRP+\angle MQP=180^\circ$,即 R,M,Q,P 四点共圆.

如图,联结 ED.易知 $\angle PEC=\angle DEC$,$\angle DEB=\angle FEB$,有

$$\frac{PC}{CD}=\frac{PE}{ED}=\frac{PB}{BD}$$

联结 ME.可知 $\angle EMC=180^\circ-2\angle ACB$,$\angle EDP=180^\circ-\angle ACB-\angle CED$.故

$$\angle MED=\angle ACB-\angle CED=\angle EPC$$

所以,$\triangle MDE\backsim\triangle MEP$.从而有

$$ME^2=MD\cdot MP=MC^2$$

又因为 $RQ\parallel FP$,所以 $\angle BRD=\angle BFE=\angle DCQ$.所以 B,R,C,Q 四点共圆.所以

$$RD\cdot DQ=BD\cdot CD=(BM+MD)(CM-MD)=$$
$$MC^2-MD^2=MD\cdot MP-MD^2=MD\cdot PD$$

所以 R,M,Q,P 四点共圆,即

$$\angle MRP+\angle MQP=180^\circ$$

当 $N\in BC$ 且 $\angle NQP+\angle NRP<180^\circ$ 时,N 必在 M 右侧,故 $BN>CN$.

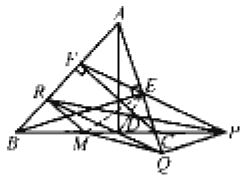


图 57

(43) 点 A 在 $\angle KMN$ 内,点 B 在 KM 上,点 C 在 MN 上.如果 $\angle CBM = \angle ABK$,$\angle BCM = \angle ACN$,求证:$\triangle BCM$ 的外心在 AM 上.

(2001 年世界城际间联赛)

证明 如图 58,延长 AB,AC,联结 AM.由对顶角相等及 $\angle CBM = \angle ABK$,知 BM 为 $\triangle ABC$ 的外角平分线.

同理可知,CM 为 $\triangle ABC$ 的另一外角平分线.故 M 为 $\triangle ABC$ 的旁切圆圆心.所以,AM 平分 $\angle BAC$.

记 $\triangle ABC$ 的内心为 I,易知 I 在 AM 上,联结 IB,IC.由 IB 平分 $\angle ABC$ 及 $\angle CBM = \angle ABK$,知 $IB \perp BM$.同理,有 $IC \perp CM$.

所以,I,B,M,C 四点共圆,且 MI 为直径.

因此,$\triangle BCM$ 的外心在 MI,即 AM 上.

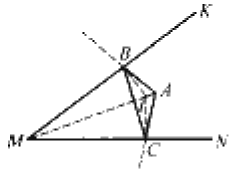


图 58

(44) 如图59,$\triangle AEF$ 是矩形$ABCD$的内接直角三角形,E,F 分别在边 BC,CD 上,且 $\angle AEF = 90°$,$AE = 4$,$EF = 3$.求矩形 $ABCD$ 面积的最小值.

(1999 年上海市高中数学竞赛)

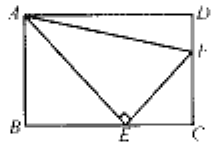


图 59

解 如图 60,设 $\angle AEB = \alpha$,则 $\angle EFC = \alpha$.从而 $AB = 4\sin\alpha$,$BE = 4\cos\alpha$,$CE = 3\sin\alpha$.

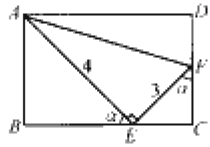


图 60

所以

$$\begin{aligned}S_{ABCD} = AB \cdot BC &= 4\sin\alpha(4\cos\alpha + 3\sin\alpha) = \\ &16\sin\alpha \cdot \cos\alpha + 12\sin^2\alpha = \\ &8\sin 2\alpha + 6(1-\cos 2\alpha) = \\ &8\sin 2\alpha - 6\cos 2\alpha + 6\end{aligned}$$

设 $t = \tan\alpha$,则

$$y = 8\sin 2\alpha - 6\cos 2\alpha = 8 \cdot \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} - 6 \cdot \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{6t^2+16t-6}{t^2+1}$$

由 $yt^2 + y = 6t^2 + 16t - 6$,即

$$(y-6)t^2 - 16t + y + 6 = 0$$

得 $y = 6$ 时,$t = \frac{3}{4}$;$y \neq 6$ 时,$\Delta = 16^2 - 4(y^2 - 6^2) \geqslant 0$,解得 $-10 \leqslant y \leqslant 10$ 且 $y \neq 6$.

又由于 $t > 0$,所以 $\frac{y+6}{y-6} > 0$,从而 $y > 6$.

综上得 $6 \leqslant y \leqslant 10$. 从而 $(S_{ABCD})_{min} = 6 + 6 = 12$.

> **45** 已知 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，联结 AI,BI,CI. 若 $\triangle BIC$，$\triangle CIA$，$\triangle AIB$ 中有一个三角形与 $\triangle ABC$ 相似，求 $\triangle ABC$ 各角的大小.
>
> （1999 年世界城际间联赛）

解　不妨假设 $\triangle BIC$ 与 $\triangle ABC$ 相似，则 $\angle BIC \neq \angle A$.（实际上，若 $\angle BIC = \frac{1}{2}\angle + 90° = \angle A$，则 $\angle A = 180°$，矛盾）

不妨假设 $\angle IBC = \angle A$，$\angle BIC = \angle C$，$\angle ICB = \angle B$，则有

$$\frac{1}{2}\angle B = \angle A, 90° + \frac{1}{2}\angle A = \angle C, \frac{1}{2}\angle C = \angle B$$

从而

$$\angle A = \frac{\pi}{7}, \angle B = \frac{2\pi}{7}, \angle C = \frac{4\pi}{7}$$

因此，$\triangle ABC$ 的各角分别为 $\frac{\pi}{7},\frac{2\pi}{7},\frac{4\pi}{7}$.

> **46** 设 P 为锐角 $\triangle ABC$ 内一点，P 到三条边 BC，CA，AB 的垂足分别为 D，E，F. 求出（并加以证明）使 $PD^2 + PE^2 + PF^2$ 达到最小值的点 P.
>
> （1990 年浙江省高中数学夏令营）

解　如图 61，设 S 为 $\triangle ABC$ 的面积，其三边长分别为 a,b,c，且 $PD = x, PE = y, PF = z$，则

$$w = PD^2 + PE^2 + PF^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

有

$$S^2 = (S_{\triangle PBC} + S_{\triangle PCA} + S_{\triangle PAB})^2 = \frac{1}{4}(ax + by + cz)^2 \leqslant \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)$$

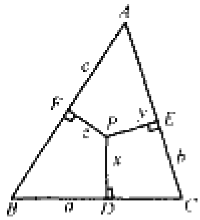


图 61

故

$$w \geqslant \frac{4S^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

当且仅当

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \lambda = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2}$$

时

$$w_{\min} = \frac{4S^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

点 P 可以这样作出：作 BC 的平行线与另两边相交，且使其到 BC 的距离为 λa，同样作 AC 的平行线使其到 AC 的距离为 λb，则两直线在 $\triangle ABC$ 内的交点即为点 P.

㊼ 已知$\triangle ABC$是边长为1的正三角形，D是边BC上一点且$BD=p$，r_1，r_2分别是$\triangle ABD$和$\triangle ADC$的内切圆的半径．请用p表示r_1r_2，并求r_1r_2的最大值．

（2000年朝鲜数学奥林匹克）

解 如图62，在$\triangle ABD$中，由余弦定理得

$$AD^2=p^2-p+1$$

$$AD=\sqrt{p^2-p+1}$$

又三角形的面积等于其半周长与内切圆半径之积，故

$$\frac{1+p+\sqrt{p^2-p+1}}{2}\cdot r_1=S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}\times 1\times p\cdot\sin 60^\circ$$

则
$$r_1=\frac{\sqrt{3}(1+p-\sqrt{p^2-p+1})}{6}$$

同理，由$\triangle ADC$可得

$$r_2=\frac{\sqrt{3}(2-p-\sqrt{p^2-p+1})}{6}$$

由于
$$r_1r_2=\frac{1-\sqrt{p^2-p+1}}{4}$$

故当$p=\frac{1}{2}$时，r_1r_2取最大值$\frac{2-\sqrt{3}}{8}$．

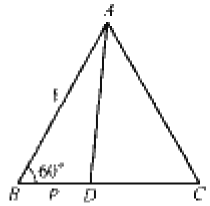


图62

㊽ 已知D是$\triangle ABC$的边AB上的任意一点，E是边AC上的任意一点，联结DE，F是线段DE上的任意一点，设$\frac{AD}{AB}=x$，$\frac{AE}{AC}=y$，$\frac{DF}{DE}=z$．证明：

（1）$S_{\triangle BDF}=(1-x)yzS_{\triangle ABC}$，

$S_{\triangle CEF}=x(1-y)(1-z)S_{\triangle ABC}$；

（2）$\sqrt[3]{S_{\triangle BDF}}+\sqrt[3]{S_{\triangle CEF}}\leqslant\sqrt[3]{S_{\triangle ABC}}$．

（2003年中国女子数学奥林匹克）

证明 联结BE，CD，如图63所示．

（1）$S_{\triangle BDF}=zS_{\triangle BDE}=z(1-x)S_{\triangle ABE}=$
$z(1-x)yS_{\triangle ABC}$

$S_{\triangle CEF}=(1-z)S_{\triangle CDE}=(1-z)(1-y)S_{\triangle ACD}=$
$(1-z)(1-y)xS_{\triangle ABC}$

（2）由（1）得

$$\sqrt[3]{S_{\triangle BDF}}+\sqrt[3]{S_{\triangle CEF}}=$$
$$\left(\sqrt[3]{(1-x)yz}+\sqrt[3]{x(1-y)(1-z)}\right)\sqrt[3]{S_{\triangle ABC}}\leqslant$$
$$\left(\frac{(1-x)+y+z}{3}+\frac{x+(1-y)+(1-z)}{3}\right)\sqrt[3]{S_{\triangle ABC}}=$$
$$\sqrt[3]{S_{\triangle ABC}}$$

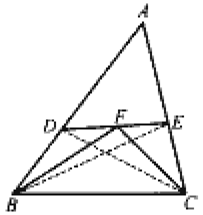


图 63

㊾ 设 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 $AB=c,BC=a,CA=b,a,b,c$ 互不相等，AD,BE,CF 分别为 $\triangle ABC$ 的三条内角平分线，且 $DE=DF$，如图 64 所示. 证明：

(1) $\dfrac{a}{b+c}=\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$;

(2) $\angle BAC>90^\circ$.

(2003 年中国女子数学奥林匹克)

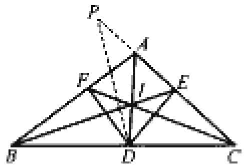


图 64

证明 由正弦定理得

$$\frac{\sin\angle AFD}{\sin\angle FAD}=\frac{AD}{FD}=\frac{AD}{ED}=\frac{\sin\angle AED}{\sin\angle DAE}$$

所以 $\sin\angle AFD=\sin\angle AED$，故 $\angle AFD=\angle AED$，或 $\angle AFD+\angle AED=180^\circ$.

若 $\angle AFD=\angle AED$，则 $\triangle ADF\cong\triangle ADE$，得 $AF=AE$，于是 $\triangle AIF\cong\triangle AIE$，得 $\angle AFI=\angle AEI$，从而 $\triangle AFC\cong\triangle AEB$，故 $AC=AB$，矛盾. 所以 $\angle AFD+\angle AED=180^\circ$，$A,F,D,E$ 四点共圆，于是 $\angle DEC=\angle DFA>\angle ABC$，在 CE 的延长线上取一点 P，使得 $\angle DPC=\angle B$，则

$$PC=PE+CE \qquad ①$$

由 $\angle BFD=\angle PED,FD=ED$，得 $\triangle BFD\cong\triangle PED$，故

$$PE=BF=\frac{ac}{a+b}$$

又 $\triangle PCD\backsim\triangle BCA$，所以 $\dfrac{PC}{BC}=\dfrac{CD}{CA}$，于是

$$PC=a\cdot\frac{ba}{b+c}\cdot\frac{1}{b}=\frac{a^2}{b+c} \qquad ②$$

由 ①,② 得
$$\frac{a^2}{b+c}=\frac{ac}{a+b}+\frac{ab}{c+a}$$

所以
$$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

(2) 由(1)知

$$\frac{a}{b+c}=\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

所以

$$a(a+b)(a+c)=b(b+a)(b+c)+c(c+a)(c+b)$$

$$a^2(a+b+c)=b^2(a+b+c)+c^2(a+b+c)+abc>$$
$$b^2(a+b+c)+c^2(a+b+c)$$

故
$$a^2>b^2+c^2$$

所以，$\angle BAC>90°$.

⑤⑩ 证明：若凸四边形 $ABCD$ 内任意一点 P 到四条边 AB，BC，CD，DA 的距离之和为定值，则 $ABCD$ 是平行四边形.

（2003 年中国西部数学奥林匹克）

解　用记号 $d(P,l)$ 表示点 P 到直线 l 的距离. 先证明一个引理：设 $\angle SAT=\alpha$ 是一个定角，$\angle SAT$ 内一动点 P 到 AS，AT 的距离之和为常数 m 的轨迹是线段 BC，其中，B，C 分别在 AS、AT 上，且 $AB=AC=\dfrac{m}{\sin\alpha}$. 且若点 P 在 $\triangle ABC$ 内，则点 P 到两边 AS，AT 的距离之和小于 m；若点 P 在 $\triangle ABC$ 外，则点 P 到两边 AS，AT 的距离之和大于 m.

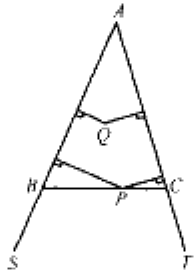


图 65

引理的证明：事实上，由 $S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PAC}=S_{\triangle ABC}$，知
$$d(P,AB)+d(P,AC)=m$$
若点 Q 在 $\triangle ABC$ 内，由 $S_{\triangle QAB}+S_{\triangle QAC}<S_{\triangle ABC}$，得
$$d(Q,AB)+d(Q,AC)<m$$
若 Q 在 $\triangle ABC$ 外，由 $S_{\triangle QAB}+S_{\triangle QAC}>S_{\triangle ABC}$，得
$$d(Q,AB)+d(Q,AC)>m$$
引理得证. 下面，我们分两种情形讨论.

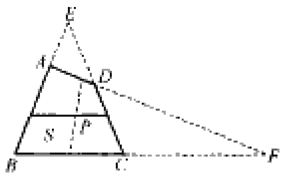


图 66

1）若四边形 $ABCD$ 的两组对边都不平行，不妨设 BC 与 AD 相交于点 F，BA 与 CD 相交于点 E. 过点 P 分别作线段 l_1，l_2，使得 l_1 上的任意一点到 AB，CD 的距离之和为常数，l_2 上的任意一点到 BC，AD 的距离之和为常数，如图，则对于区域 S 内任意一点 Q，有
$$d(P,AB)+d(P,BC)+d(P,CD)+d(P,DA)=$$
$$d(Q,AB)+d(Q,BC)+d(Q,CD)+d(Q,DA)=$$
$$[d(Q,AB)+d(Q,CD)]+[d(Q,BC)+d(Q,DA)]>$$
$$[d(P,AB)+d(P,CD)]+[d(P,BC)+d(P,DA)]$$
矛盾！

2）四边形 $ABCD$ 是梯形时，同样可以推得矛盾.

于是，我们得到四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

⑤① 设 D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上的一点，点 P 在线段 AD 上，过点 D 作一直线分别与线段 AB，PB 交于点 M，E，与线段 AC，PC 的延长线交于点 F，N．已知 $DE = DF$，求证：$DM = DN$．

（2004 年中国东南地区数学奥林匹克）

证明 对 $\triangle AMD$ 和直线 BEP 用梅涅劳斯定理得

$$\frac{AP}{PD} \cdot \frac{DE}{EM} \cdot \frac{MB}{BA} = 1 \quad ①$$

对 $\triangle AFD$ 和直线 NCP 用梅涅劳斯定理得

$$\frac{AC}{CF} \cdot \frac{FN}{ND} \cdot \frac{DP}{PA} = 1 \quad ②$$

对 $\triangle AMF$ 和直线 BDC 用梅涅劳斯定理得

$$\frac{AB}{BM} \cdot \frac{MD}{DF} \cdot \frac{FC}{CA} = 1 \quad ③$$

①，②，③ 式相乘得

$$\frac{DE}{EM} \cdot \frac{EN}{ND} \cdot \frac{MD}{DF} = 1$$

又 $DE = DF$，所以有

$$\frac{DM}{DM - DE} = \frac{DN}{DN - DE}$$

所以 $DM = DN$．

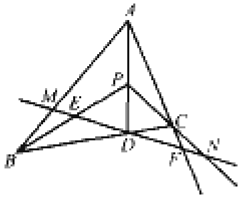


图 67

⑤② 在凸四边形 $ABCD$ 中，$AB = a$，$BC = b$，$CD = c$，$DA = d$，$AC = e$，$BD = f$，且 $\max\{a, b, c, d, e, f\} = 1$．求 $abcd$ 的最大值．

（2004 年中国国家集训队测试题）

解 下面分两种情形讨论．

1）如图 68，当 $e = f = 1$ 时，设 AC 与 BD 相交于点 E，记 $AE = m$，$CE = n$，$BE = p$，$DE = q$，则

$$m + n = p + q = 1$$

由对称性，不妨设 $p \geqslant m \geqslant n \geqslant q$，易知 $mn \geqslant pq$．

若 $p \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$，由斯图瓦特（Stewart）定理得

$$p^2 + mn = a^2 n + b^2 m \geqslant 2ab\sqrt{mn}$$

$$q^2 + mn = c^2 m + d^2 n \geqslant 2cd\sqrt{mn}$$

所以

$$4abcdmn \leqslant (p^2 + mn)(q^2 + mn) = p^2q^2 + mn(p^2 + q^2) + m^2n^2 =$$

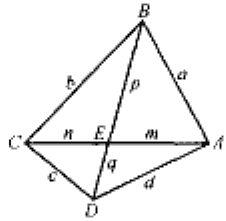


图 68

$$mn+(mn-pq)^2=$$
$$mn\left[1+\left(\sqrt{mn}-\frac{pq}{\sqrt{mn}}\right)^2\right]$$

因为 $mn\leqslant\frac{(m+n)^2}{4}=\frac{1}{4}$，又当 x 与 $1-x$ 越接近时 $x(1-x)(0<x<1)$ 越大(因为 $ab=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}$)，故由 $p\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，$q=1-p$ 知

$$mn\geqslant pq\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}$$

于是 $\sqrt{mn}-\frac{pq}{\sqrt{mn}}\leqslant\frac{1}{2}-2pq\leqslant\frac{1}{2}-2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}\right)=2-\sqrt{3}$

所以 $$abcd\leqslant\frac{1}{4}[1+(2-\sqrt{3})^2]=2-\sqrt{3}$$

若 $p>\frac{\sqrt{3}}{2}$，由

$$q^2+mn=c^2m+d^2n\geqslant 2cd\sqrt{mn}$$

及 $$\sqrt{mn}\geqslant\sqrt{pq}>q$$

得 $2cd\leqslant\frac{q^2}{\sqrt{mn}}+\sqrt{mn}\leqslant 2q^2+\frac{1}{2}$ ($f(x)=\frac{q^2}{x}+x$ 在 $\left(q,\frac{1}{2}\right]$ 上递增) $\leqslant 2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}=4-2\sqrt{3}$

所以 $cd\leqslant 2-\sqrt{3}$.

又 $0<a\leqslant 1,0<b\leqslant 1$，于是 $abcd\leqslant 2-\sqrt{3}$.

当 $\triangle ABD$ 为边长为 1 的正三角形，C 在 $\angle BAD$ 的平分线上，且 $AC=1$ 时，等号成立.

2) 当 $\min\{e,f\}<1$ 时：

若 a,b,c,d 均小于 1，则此时恰有一条对角线的长为 1. 不妨设 $e=AC=1$，于是 $BD<1$.

此时作 $\angle ABC$ 的平分线的反向延长线，并在上面取一点 B'. 易知 $\angle ABB',\angle CBB',\angle DBB'$ 均大于 $90°$，从而 $AB'>AB,CB'>CB,B'D>BD$.

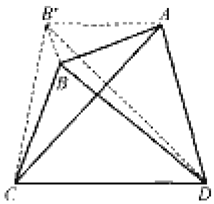


图 69

取点 B'，使 $\max\{AB',CB',DB'\}=1$. 此时，若 $DB'=1$，则由 1)，得

$$abcd\leqslant AB'\cdot B'C\cdot cd\leqslant 2-\sqrt{3}$$

否则若 $AB'=1$ 或 $CB'=1$，问题转化为如下情形).

若 a,b,c,d 中至少有一个为 1，不妨设 $CD=c=1$.

分别以 C,D 为圆心，1 为半径作圆弧，交于点 P(与 A,B 在 CD 同侧)，则 A,B 在此区域的内部或边界上.

若点 B 在区域的内部，作 $\angle ABC$ 的平分线的反向延长线，交圆弧于点 B'，若点 A 在区域的内部，作 $\angle B'AD$ 的平分线的反向延长线，交圆弧于点 A'（若点 A，B 已经在圆弧上，就不必再作了，但 A，B 不可能同时在圆弧上）.

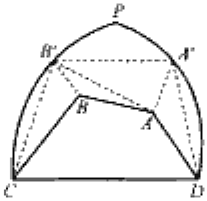


图 70

若 B'，A' 分别在 $\overset{\frown}{CP}$，$\overset{\frown}{DP}$ 上. 因为 $AB \leqslant AB' \leqslant A'B'$，$BC \leqslant B'C$，$AD \leqslant A'D$，且等号不可能同时成立，而 $A'C = B'D = 1$，于是由 1) 知

$$abcd < A'B' \cdot B'C \cdot CD \cdot DA' \leqslant 2-\sqrt{3}$$

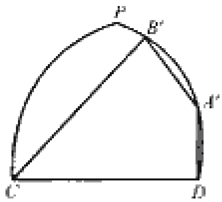


图 71

若 B'，A' 在同一条圆弧上，不妨设在 $\overset{\frown}{DP}$ 上. 此时 $A'B' < A'P$. 把 B' 调整到 P，由 1) 得

$$abcd < A'P \cdot PC \cdot CD \cdot DA' \leqslant 2-\sqrt{3}$$

综上便知，$abcd$ 的最大值为 $2-\sqrt{3}$.

53 点 D，E，F 分别在锐角 $\triangle ABC$ 的边 BC，CA，AB 上（均不是端点），满足 $EF \parallel BC$. D_1 是边 BC 上一点（不同于 B，D，C），过 D_1 作 $D_1E_1 \parallel DE$，$D_1F_1 \parallel DF$，分别交 AC，AB 两边于点 E_1，F_1，联结 E_1F_1，再在 BC 上方（与 A 同侧）作 $\triangle PBC$，使得 $\triangle PBC \backsim \triangle DEF$，联结 PD_1，求证：EF，E_1F_1，PD_1 三线共点.

（2004 年中国国家队选拔赛试题）

证明 如图 72. 记 PD_1，D_1E_1，D_1F_1 分别交 EF 于 D_2，E_2，F_2 则只须证明 E_1，D_2，F_1 三点共线.

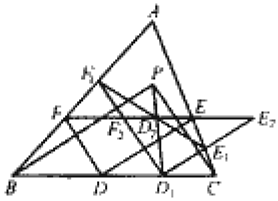


图 72

因为 $\triangle E_1D_1C \backsim \triangle E_1E_2E$，故

$$\frac{D_1E_1}{E_1E_2}=\frac{D_1C}{EE_2} \qquad ①$$

再由 $\triangle F_1FF_2 \backsim \triangle F_1BD_1$，得

$$\frac{F_2F_1}{F_1D_1}=\frac{FF_2}{BD_1} \qquad ②$$

因为 $\triangle PBC$ 和 $\triangle D_1E_2F_2$ 都相似于 $\triangle DEF$，且它们的对应边平行，故 $\triangle PBC \backsim \triangle D_1E_2F_2$，且对应边平行，从而 PD_1 和 D_1D_2 是这对相似三角形中处于对应位置的线段，故

$$\frac{E_2D_2}{D_2F_2}=\frac{BD_1}{D_1C} \qquad ③$$

将①，②，③ 三式相乘，并注意到 $EE_2 = DD_1 = FF_2$（四边形 DD_1E_2E 和 DD_1F_2F 都是平行四边形），得出

$$\frac{D_1E_1}{E_1E_2}\cdot\frac{E_2D_2}{D_2F_2}\cdot\frac{F_2F_1}{F_1D_1}=\frac{D_1C}{EE_2}\cdot\frac{BD_1}{D_1C}\cdot\frac{FF_2}{BD_1}=\frac{FF_2}{EE_2}=1$$

故对 $\triangle D_1E_2F_2$，由梅涅劳斯定理的逆定理知 E_1,D_2,F_1 三点共线，这就完成了证明.

54 设 a,b,c 是周长不超过 2π 的三角形的三条边长. 证明：长为 $\sin a,\sin b,\sin c$ 的三条线段可构成三角形.

（2004 年中国国家队选拔赛试题）

证法 1 由已知条件易知 $0<a,b,c<\pi$，故 $\sin a,\sin b,\sin c$ 都是正数，且

$$|\cos a|<1,\ |\cos b|<1,\ |\cos c|<1 \quad ①$$

不妨设 $\sin a\leqslant\sin b\leqslant\sin c$.

若 $a=\frac{\pi}{2}$，则 $b=c=\frac{\pi}{2}$，结论显然成立.

以下设 $a\neq\frac{\pi}{2}$. 我们分两种情形讨论.

1）设 $a+b+c=2\pi$，则（利用 ①）

$$\begin{aligned}\sin c&=\sin(2\pi-a-b)=-\sin(a+b)\leqslant\\&\sin a\cdot|\cos b|+\sin b\cdot|\cos a|<\\&\sin a+\sin b\end{aligned}$$

结论得证.

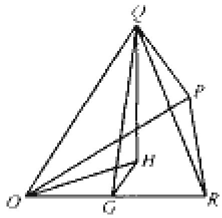


图 73

2）设 $a+b+c<2\pi$. 由于 a,b,c 为三角形的三边长，故存在一个三面角使得 a,b,c 分别为其面角. 如图 73 所示，OR,OP,OQ 不在同一平面上，$OQ=OP=OR=1$，$\angle QOR=a$，$\angle QOP=b$，$\angle POR=c$. 过 Q 作平面 POR 的垂线，垂足为 H；过 H 作 OR 的垂线，垂足为 G. 设 $\angle QOH=\varphi$，$\angle HOR=\theta$，则 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\theta\leqslant2\pi$. 由勾股定理，得

$$\begin{aligned}\sin a&=QG=\sqrt{QH^2+GH^2}=\sqrt{\sin^2\varphi+\cos^2\varphi\cdot\sin^2\theta}=\\&\sqrt{\sin^2\theta+\sin^2\varphi\cdot\cos^2\theta}\geqslant|\sin\theta|\end{aligned} \quad ②$$

类似地有

$$\sin b=\sqrt{\sin^2(c-\theta)+\sin^2\varphi\cdot\cos^2(\theta-c)}\geqslant|\sin(c-\theta)| \quad ③$$

我们断言，② 和 ③ 中的等号不能同时成立. 若不然，由 $\sin^2\varphi\neq0$ 得 $\cos\theta=\cos(c-\theta)=0$. 故 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{3\pi}{2}$，$c-\theta=\pm\frac{\pi}{2}$ 或 $-\frac{3}{2}\pi$，这与 $0<c<\pi$ 相违. 因此，由 ②，③ 得

$$\begin{aligned}\sin a+\sin b>|\sin\theta|+|\sin(c-\theta)|\geqslant\\|\sin(\theta+c-\theta)|=\sin c\end{aligned}$$

综上，结论得证.

证法2 由已知条件易知 $0 < a, b, c < \pi$，故 $\sin a, \sin b, \sin c$ 都是正数. 此外，我们有

$$0 \leqslant \left|\frac{a-b}{2}\right| < \frac{c}{2} < \frac{\pi}{2}$$

及
$$0 < \frac{a+b-c}{4} < \frac{a+b+c}{4} \leqslant \frac{\pi}{2}$$

从而
$$\cos\frac{a-b}{2} > \cos\frac{c}{2} > 0$$

及 $$\sin\frac{a+b}{2} - \sin\frac{c}{2} = 2\sin\frac{a+b-c}{4}\cdot\cos\frac{a+b+c}{4} \geqslant 0$$

因此

$$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cdot\cos\frac{a-b}{2} > 2\sin\frac{c}{2}\cdot\cos\frac{c}{2} = \sin c$$

同理，$\sin a + \sin c > \sin b$，$\sin b + \sin c > \sin a$. 故命题得证.

55 已知等腰 $\triangle ABC$ 的边长 $BC = a$，$AB = AC = b$，M，N 分别是边 AC 和 AB 上的动点，满足 $a^2 \cdot AM \cdot AN = b^2 \cdot BN \cdot CM$，直线 BM 和 CN 相交于点 P，求动点 P 的轨迹.

（2004 年中国国家集训队训练题）

解 如图 74，作 $\angle ACM'' = \angle BCN$，过 M'' 作 $M''M' \parallel BC$，交 AC 于 M'，则 $AM'' = AM'$，$BM'' = CM'$，所以

$$\frac{AM''}{M''B} = \frac{S_{\triangle ACM''}}{S_{\triangle BCM''}} = \frac{AC\cdot\sin\angle ACM''}{BC\cdot\sin\angle BCM''}$$

$$\frac{AN}{NB} = \frac{S_{\triangle ACN}}{S_{\triangle BCN}} = \frac{AC\cdot\sin\angle ACN}{BC\cdot\sin\angle BCN}$$

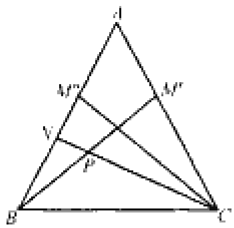


图 74

因为 $\angle ACM'' = \angle BCN$，所以 $\angle BCM'' = \angle ACN$，故

$$\frac{AM''}{M''B}\cdot\frac{AN}{NB} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

$$\frac{AM'}{M'C}\cdot\frac{AN}{NB} = \frac{b^2}{a^2}$$

又因为
$$\frac{AM}{MC}\cdot\frac{AN}{NB} = \frac{b^2}{a^2}$$

所以
$$\frac{AM}{MC} = \frac{AM'}{M'C}$$

所以，M，M' 重合.

因为 $BM''MC$ 为等腰梯形，所以 $\angle M''CM = \angle MBM'' = \angle BCN$，所以 $\triangle BNP \backsim \triangle CNB$，所以 $\angle NPB = \angle NBC$，于是 $\angle BPC = 180° - \angle ABC$.

所以，点 P 在以 BC 为弦，张角为 $180° - \angle ABC$ 的一段弧上.

又对此弧上的任意一点 P，延长 BP 交 AC 于 M，延长 CP 交 AB

于 N，可知

$$AM \cdot AN \cdot a^2 = BN \cdot CM \cdot b^2$$

所以，点 P 的轨迹是以 BC 为弦，张角为 $180° - \angle ABC$ 的一段弧（在 $\triangle ABC$ 内部）.

56 $\triangle ABC$ 在平面 π 上，周长为 $3+2\sqrt{3}$，在平面 π 上与 $\triangle ABC$ 全等的三角形内部或边界上至少有一个整点，证明：$\triangle ABC$ 是等边三角形.

（2004 年中国国家队培训题）

证明 设 $\triangle ABC$ 的边长为 $a \geqslant b \geqslant c$，对应的高分别为 h_a，h_b，h_c，面积为 S.

如图 75，若 $h_a < 1$，则将 $\triangle ABC$ 放在直线 $y=0$ 及 $y=1$ 之间，可知 $\triangle ABC$ 内无整点，矛盾！

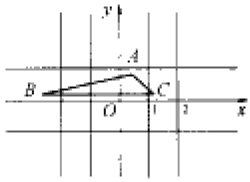


图 75

所以，$h_a \geqslant 1$.

此时在 $\triangle ABC$ 的边 AB，AC 上分别取点 D，E，如图 76 所示，使 $DE \parallel BC$ 且 DE，BC 间的距离为 1，我们有 $DE \geqslant 1$，即

$$\frac{h_a - 1}{h_a} \geqslant \frac{1}{a}$$

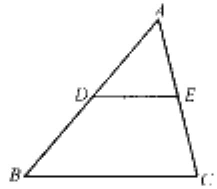


图 76

若不然，则 $DE < 1$，如图 77 放置 $\triangle ABC$，F，G 为相邻整点，$FG = 1$，D，E 在 F，G 之间. 因为 $a \geqslant b \geqslant c$，故 $\angle ABC$，$\angle ACB$ 均为锐角，因而此时 $\triangle ABC$ 内部除 BC 上有整点外再无其他整点. 若将 $\triangle ABC$ 向上平移足够小的单位，可知 $\triangle ABC$ 内无整点，矛盾！

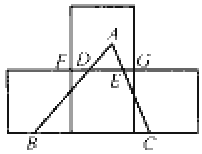


图 77

所以 $DE \geqslant 1$，即 $\frac{h_a - 1}{h_a} \geqslant \frac{1}{a}$. 所以

$$h_a \geqslant \frac{a}{a-1}$$

而 $h_a = \frac{2S}{a}$，所以

$$2S \geqslant \frac{a^2}{a-1} = a - 1 + \frac{1}{a-1} + 2$$

因为 $a \geqslant b \geqslant c$，$a + b + c = 3 + 2\sqrt{3}$，所以

$$a \geqslant 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

而

$S \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 1 + \frac{7\sqrt{3}}{12}$（周长一定时，等边三角形面积最大）

所以 $\quad 2\left(1 + \frac{7\sqrt{3}}{12}\right) \geqslant 2S \geqslant a - 1 + \frac{1}{a-1} + 2 \geqslant$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}+2=2+\frac{7\sqrt{3}}{6}$$

故
$$S=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(1+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

可知 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

又知当 $\triangle ABC$ 为等边三角形时,如图78所示,作出 $\triangle ABC$ 的内接正方形,可知 $DE=1$,对 $\triangle ABC$ 的任何位置,它截网格线至少有一条长不小于1,从而 $\triangle ABC$ 内至少有一整点.

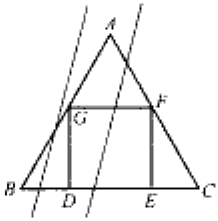


图 78

综上知,$\triangle ABC$ 为正三角形.

57 设 E 为凸四边形 $ABCD$ 的对角线的交点. F_1,F_2,F_3 分别为 $\triangle ABE$,$\triangle CDE$,四边形 $ABCD$ 的面积. 证明:$\sqrt{F_1}+\sqrt{F_2}\leqslant\sqrt{F}$,等号何时成立?

(2004年中国国家集训队训练题)

证明　记 a,b,c,d 分别为 EA,EB,EC,ED 的长度,如图79所示,则

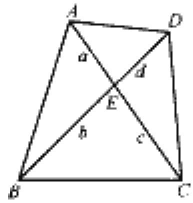


图 79

$$F_1=S_{\triangle ABE}=\frac{a}{a+c}\cdot S_{\triangle ABC}=$$
$$\frac{a}{a+c}\cdot\frac{b}{b+d}\cdot S_{ABCD}$$

同理
$$F_2=\frac{c}{a+c}\cdot\frac{d}{b+d}\cdot S_{ABCD}$$

因此　$\sqrt{F_1}+\sqrt{F_2}\leqslant\sqrt{F}\Leftrightarrow\sqrt{ab}+\sqrt{cd}\leqslant\sqrt{(a+c)(b+d)}$

由柯西(Cauchy)不等式

$$(a+c)(b+d)\geqslant(\sqrt{ab}+\sqrt{cd})^2$$

当且仅当 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$,即 $ad=bc$,$S_{\triangle AED}=S_{\triangle BEC}$. 也就是 $S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ABC}$,即 $AB\parallel CD$ 时等号成立.

故原不等式成立,当且仅当 $AB\parallel CD$ 时等号成立.

48 已知一个凸多边形 x 的边长和对角线均为有理数,凸多边形 x 被它的所有对角线分成一些小凸多边形,证明这些小凸多边形的边长都是有理数.

(2004年中国国家集训队训练题)

证明　设 $x=A_1A_2\cdots A_n(n\geqslant3)$. 当 $n=3$ 时很平凡,我们只须考虑 $n\geqslant4$ 时的情况. 为了证明结论,引入下面的引理:设凸四边形 $ABCD$ 的边和对角线都是有理数. 若线段 AC 和 BD 交于点 P,

则线段 AP，BP，CP，DP 的长度都是有理数.

引理的证明：如图 80 所示，设 $\angle DAP = A_1$，$\angle BAP = A_2$，由余弦定理易知 $\cos A_1$，$\cos A_2$，$\cos(A_1+A_2)$ 都是有理数，再由和差化积公式，得

$$\sin A_1 \cdot \sin A_2 = \cos A_1 \cdot \cos A_2 - \cos(A_1+A_2)$$

即 $\sin A_1 \cdot \sin A_2$ 是有理数，所以

$$\frac{\sin A_2}{\sin A_1} = \frac{\sin A_2 \cdot \sin A_1}{\sin^2 A_1} = \frac{\sin A_2 \cdot \sin A_1}{1-\cos^2 A_1}$$

是有理数.

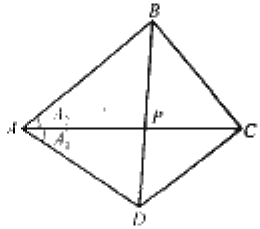


图 80

由共边定理，知

$$\frac{|BP|}{|PD|} = \frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ADP}} = \frac{\frac{1}{2}|AB|\cdot|AP|\cdot\sin A_2}{\frac{1}{2}|AD|\cdot|AP|\cdot\sin A_1} = \frac{|AB|\cdot\sin A_2}{|AD|\cdot\sin A_1}$$

即 $\frac{|BP|}{|PD|}$ 是有理数.

因为 $|BP|+|PD|=|BD|$ 是有理数，所以 $|BP|$，$|PD|$ 都是有理数，同理可得 $|AP|$，$|PC|$ 是有理数. 于是，引理得证.

由引理知，当 x 是凸四边形时，结论显然成立. 下设 $A_iA_j(1 \leqslant i < j \leqslant n)$ 是 x 的一条对角线，C_1，C_2，C_3，$\cdots$，C_m 是对角线 A_iA_j 上连续的分点（C_1 是离点 A_i 最近的分点，C_m 离点 A_j 近）. 线段 $C_lC_{l+1}(1 \leqslant l \leqslant m-1)$ 是分割所得多边形的边. 设 C_l 是对角线 A_iA_j，A_sA_t 的交点，则四边形 $A_iA_sA_jA_t$ 满足引理条件，所以线段 A_iC_l 和 C_lA_j 的长度为有理数. 类似地，A_iC_1，A_iC_2，$\cdots$，A_iC_m 的长度都是有理数，从而 $C_lC_{l+1} = A_iC_{l+1} - A_iC_l$ 是有理数. 由 i，j，l 的任意性可知，分割后所有的小凸多边形的边长都是有理数. 即原命题得证.

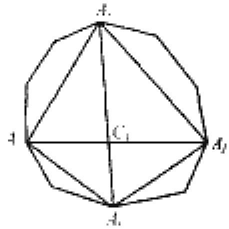


图 81

59 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A = 90°$，$AC > AB$. 我们在边 AC 上取点 E，在边 BC 上取点 D，使得 $AB = AE = BD$. 求证：$\angle ADE = 90°$ 的充分必要条件是 $AB : AC : BC = 3 : 4 : 5$.

（2004 年中国国家集训队训练题）

证明　如图 82，取 AE 中点 F，联结 BF，则

$$\angle ADE = 90° \Leftrightarrow DF = \frac{AE}{2} \Leftrightarrow DF = AF$$

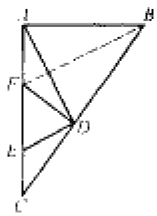


图 82

又 $BA = BD$，BF 为公共边，所以

$$DF = AF \Leftrightarrow \triangle ABF \cong \triangle DBF$$

又 $\triangle ABF \cong \triangle DBF \Leftrightarrow \angle ABF = \angle DBF \Leftrightarrow$

$$\angle ABD = 2\angle ABF \Leftrightarrow$$

$$\angle ABD = 2\arctan\frac{1}{2} = \arctan\frac{4}{3}$$

所以
$$\angle ADE = 90^\circ \Leftrightarrow \angle ABD = \arctan\frac{4}{3} \Leftrightarrow$$
$$AB : AC : BC = 3 : 4 : 5$$

60 $\triangle ABC$ 的边 BC 和边 AC 分别取定长 a 和 b，而边 AB 的长度可变动. 以边 AB 作为正方形的一边向三角形外作正方形. 设 O 是所作正方形的中心. 并设 BC 和 AC 的中点分别为 M 和 N. 试求 $OM + ON$ 的最大值.

（2004 年中国国家集训队训练题）

解　如图 83，设正方形为 $ABDE$，则 $OM = \frac{CE}{2}$，$ON = \frac{CD}{2}$. 所以

$$OM + ON = \frac{1}{2}(CD + CE)$$

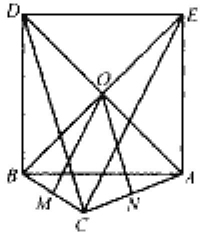


图 83

设 $AB = c$，则 $BD = AE = c$，$AD = BE = \sqrt{2}c$. 对四边形 $ACBD$ 用广义托勒密定理得

$$CD \cdot c \leqslant AC \cdot c + BC \cdot \sqrt{2}c \quad ①$$

所以
$$CD \leqslant AC + \sqrt{2}BC$$
即
$$CD \leqslant b + \sqrt{2}a$$

类似，对四边形 $ACBE$ 用广义托勒密定理得

$$CE \cdot c \leqslant BC \cdot c + AC \cdot \sqrt{2}c \quad ②$$

即
$$CE \leqslant a + \sqrt{2}b$$

所以
$$OM + ON = \frac{1}{2}(CD + CE) \leqslant \frac{\sqrt{2}+1}{2}(a + b)$$

又当 $\angle ACB = 135^\circ$ 时，A，C，B，D，E 五点共圆，①，② 的等号均可成立. 所以

$$(OM + ON)_{\max} = \frac{\sqrt{2}+1}{2}(a + b)$$

61 给定凸四边形 $ABCD$. 若在四边形 $ABCD$ 内有点 M，使得 $\triangle AMB$ 和 $\triangle CMD$ 为等腰三角形（即 $AM = MB$，$CM = MD$），且 $\angle AMB = \angle CMD = 120^\circ$. 试证存在一点 N，使得 $\triangle BNC$ 和 $\triangle DNA$ 都是正三角形.

（2004 年中国国家集训队训练题）

证明　先证明一个引理：在复平面上，$\triangle PQR$ 为正三角形的充要条件是

$$z_P + \omega z_Q + \omega^2 z_R = 0 \text{ 或 } z_P + \omega z_R + \omega^2 z_Q = 0 \quad ①$$

其中，$\omega = e^{\frac{2\pi}{3}i}$.

引理的证明：

充分性：若①中两式之一成立，不妨设前式成立，则

$$z_P - z_Q = -(\omega + 1)z_Q - \omega^2 z_R = \omega^2(z_Q - z_R)$$

所以 $$|z_P - z_Q| = |z_Q - z_R|$$

即 $PQ = QR$.

同理 $PQ = PR$，所以 $\triangle PQR$ 为正三角形.

必要性：若 $\triangle PQR$ 为正三角形，不妨设 P,Q,R 逆时针排列，则将 $\overrightarrow{PR}$ 逆时针旋转 $\frac{2\pi}{3}$ 可得到 $\overrightarrow{QR}$，即

$$z_P - z_Q = \omega(z_R - z_P)$$

所以 $$z_Q + \omega z_R - (\omega + 1)z_P = z_Q + \omega z_R + \omega^2 z_P = 0$$

即 $$z_P + \omega z_Q + \omega^2 z_R = 0$$

引理得证.

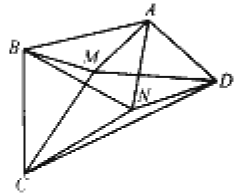


图 84

下面回到原题.

以 M 为原点建立复平面. 因为

$$MA = MB, \angle AMB = 120°, MC = MD, \angle CMD = 120°$$

且不妨设 A,B,C,D 逆时排列，则

$$z_B = \omega z_A, z_D = \omega z_C \quad ②$$

取点 N 使 $\triangle BCN$ 为正三角形，则

$$z_B + \omega z_C + \omega^2 z_N = 0 \quad ③$$

将②代入得

$$\omega z_A + z_D + \omega^2 z_N = 0$$

所以 $\triangle DNA$ 为正三角形.

> 62 设 CM 和 BN 为 $\triangle ABC$ 的中线，在边 AB 及 AC 上可分别取点 P 及 Q，使得 $\angle ACB$ 的角平分线也是 $\angle MCP$ 的角平分线，且 $\angle ABC$ 的角平分线也是 $\angle NBQ$ 的角平分线. 试问 $AP = AQ$ 是否蕴含 $\triangle ABC$ 为等腰三角形？
>
> （2004 年中国国家集训队训练题）

解 如图 85，设 $\triangle ABC$ 三边分别为 a,b,c. 由于 $\angle ACB$ 和 $\angle MCP$ 的平分线重合. 所以

$$\angle ACM = \angle BCP, \angle BCM = \angle ACP$$

由正弦定理知

$$\frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle ACM} = \frac{MC}{AM} = \frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle BCM}$$

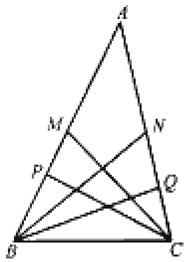


图 85

因此 $$\frac{\sin\angle ACM}{\sin\angle BCM}=\frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle ABC}=\frac{a}{b}$$

又 $$\angle BCP=\angle ACM,\angle ACP=\angle BCM$$

所以 $$\frac{\sin\angle BCP}{\sin\angle ACP}=\frac{\sin\angle ACM}{\sin\angle BCM}=\frac{a}{b}$$

$$\frac{AP}{PB}=\frac{PC\cdot\frac{\sin\angle ACP}{\sin\angle BAC}}{PC\cdot\frac{\sin\angle BCP}{\sin\angle ABC}}=\frac{\sin\angle ACP}{\sin\angle BCP}\cdot\frac{\sin\angle ABC}{\sin\angle BAC}=\frac{b}{a}\cdot\frac{b}{a}=\frac{b^2}{a^2}$$

因此 $$AP=AB\cdot\frac{b^2}{a^2+b^2}=c\cdot\frac{b^2}{a^2+b^2}$$

同理 $$AQ=b\cdot\frac{c^2}{a^2+c^2}$$

所以 $$AP=AQ\Leftrightarrow c\cdot\frac{b^2}{a^2+b^2}=b\cdot\frac{c^2}{a^2+c^2}\Leftrightarrow$$

$$\frac{b}{a^2+b^2}=\frac{c}{a^2+c^2}\Leftrightarrow a^2b+bc^2=a^2c+b^2c\Leftrightarrow$$

$$(b-c)(a^2-bc)=0 \quad ①$$

故 $\triangle ABC$ 不一定为等腰三角形，例如，当 $a=6,b=4,c=9$ 时式 ① 成立，但 a,b,c 两两不等.

> **63** 设 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，它的外心为 O，将 $\triangle AOC$ 的外心记为 T，将边 AC 的中点记为 M. 在边 AB 和 BC 上分别取点 D 和 E，使得 $\angle BDM=\angle BEM=\angle ABC$. 证明：$BT\perp DE$.
> （2004 年俄罗斯数学奥林匹克）

证明　由于点 D 和 E 分别位于 $\triangle ABC$ 的边 AB 和 BC 上，所以 $\angle ABC$ 为三角形中的最大角. 因此 $\angle AOC=2\angle ABC>120°$，并且点 O 和 T 分别位于 AC 的两侧，如图 86 所示.

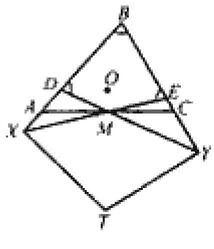


图 86

设直线 ME 和 MD 分别与直线 AB 和 BC 相交于点 X 和 Y，如图 86 所示. 由于 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，所以点 X 和 Y 分别位于边 BA 和 BC 的延长线上（分别在点 A 和 C 的外侧）. 于是

$$\angle DXM=180°-\angle ABE-\angle BEM=180°-2\angle ABC$$

同理 $$\angle EYM=180°-2\angle ABC$$

所以四边形 $DEYX$ 内接于圆，从而 $\angle BED=\angle BXY$.

显然点 O、M、T 都在边 AC 的中垂线上. 又由于 T 是 $\triangle AOC$ 的外心，所以 $\angle ATM=2\angle ACO$，于是

$$\angle ATM=2(90°-\angle MOC)=2(90°-\angle ABC)$$

因此 O 是 $\triangle ABC$ 的外心. 从而

$$\angle ATM=180°-2\angle ABC=\angle AXM$$

故知四边形 $AMTX$ 可内接于圆. 因为 $\angle AMT=90°$，所以 $\angle AXT=$

$\angle AMT = 90^\circ$.同理 $\angle CYT = 90^\circ$,故知四边形 $BXTY$ 亦可内接于圆,并且

$$\angle TBY = \angle TXY = 90^\circ - \angle BXY$$

因而得知

$$\angle BED + \angle TBE = \angle BXY + (90^\circ - \angle BXY) = 90^\circ$$

即得所证.

(64) 已知正 $\triangle ABC$ 内一点 D,满足 $\angle ADC = 150^\circ$.证明:由线段 AD,BD,CD 为边构成的三角形是直角三角形.

(2003 年北欧数学竞赛)

证明 如图 87,作 $\angle D'AB = \angle DAC$.取 $AD' = AD$,则 $\triangle ADC \cong \triangle AD'B$.故 $D'B = DC$.

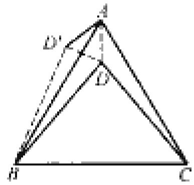


图 87

因为

$$\angle D'AD = \angle D'AB + \angle BAD = \angle DAC + \angle BAD = \angle BAC = 60^\circ$$

且 $AD' = AD$,所以,$\triangle AD'D$ 是正三角形.故

$$D'D = AD, \angle AD'D = 60^\circ$$

又

$$\angle BD'D = \angle AD'B - \angle AD'D = \angle ADC - \angle AD'D = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$$

所以,$\triangle D'DB$ 是直角三角形,且 $D'B = DC$,$D'D = AD$.

因此,AD,BD,CD 可以组成一个直角三角形.

(65) $\triangle ABC$ 的外心是 O,三条高线 AH,BK,CL 的垂足分别为 H,K,L,A_0,B_0,C_0 分别是 AH,BK,CL 的中点.以 I 为圆心的内切圆分别切 $\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 于点 D,E,F.证明:A_0D,B_0E,C_0F,OI 四线共点.(当 O,I 重合时,直线 OI 视作任一条过点 O 的直线)

(2003 年国际数学奥林匹克越南国家队选拔赛试题)

证明 不妨设 $R = 1$,则有

$$CH = 2\sin B \cdot \cos C$$

$$CD = \sin A + \sin B - \sin C$$

$$CM = \sin A$$

$$OM = \cos A$$

$$ID = r = 4\sin\frac{A}{2} \cdot \sin\frac{B}{2} \cdot \sin\frac{C}{2}$$

$$AH = 2\sin B \cdot \sin C$$

如图 88,以 H 为原点,BC 为 x 轴建立直角坐标系.易知

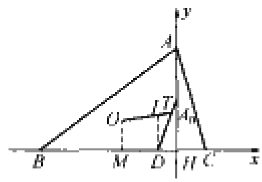


图 88

$$O(2\sin B\cdot\cos C-\sin A,\cos A)$$

$$I(2\sin B\cdot\cos C-\sin A-\sin B+\sin C,$$
$$4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2})$$

$$D(2\sin B\cdot\cos C-\sin A-\sin B+\sin C,0)$$

$$A_0(0,\sin B\cdot\sin C)$$

设 $T=OI\cap A_0D$，$T=\lambda O+(1-\lambda)I$，$\lambda\in\mathbf{R}$.所以，有

$$T(2\sin B\cdot\cos C-\sin A+(1-\lambda)(\sin C-\sin B),$$
$$\lambda\cdot\cos A+4(1-\lambda)\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2})$$

直线 A_0D 的方程为

$$\frac{y}{\sin B\cdot\sin C}+\frac{x}{2\sin B\cdot\cos C-\sin A-\sin B+\sin C}=1$$

又

$$T\in A_0D\Leftrightarrow\frac{2\sin B\cdot\cos C-\sin A+(1-\lambda)(\sin C-\sin B)}{2\sin B\cdot\cos C-\sin A-\sin B+\sin C}=1\Leftrightarrow$$

$$\frac{\lambda\cdot\cos A+4(1-\lambda)\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}{\sin B\cdot\sin C}=$$

$$\frac{\lambda(\sin C-\sin B)}{2\sin B\cdot\cos C-\sin A-\sin B+\sin C}\Leftrightarrow$$

$$\frac{\lambda\cdot\cos A+4(1-\lambda)\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}}{4\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}=$$

$$\frac{\lambda\cdot2\sin\frac{C-B}{2}\cdot\cos\frac{C+B}{2}}{4\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{B-C}{2}}\Leftrightarrow$$

$$\lambda\cdot\cos A+4(1-\lambda)\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=$$

$$-2\lambda\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\Leftrightarrow4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=$$

$$\lambda\left(4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}-\right.$$
$$\left.2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}-\cos A\right)$$

所以，A_0D，B_0E，C_0F，OI 四线共点的充分必要条件是

$$2\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}+\cos A=2\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}+\cos B=$$
$$2\sin\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}+\cos C$$

上式易证.

因此，A_0D，B_0E，C_0F，OI 四线共点.

66 M,N,P 分别是 $\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 的中点，M_1，N_1，P_1 在 $\triangle ABC$ 的边上，且满足 MM_1,NN_1,PP_1 分别平分 $\triangle ABC$ 的周长.证明：

(1) MM_1,NN_1,PP_1 交于同一点 K；

(2) $\frac{KA}{BC},\frac{KB}{CA},\frac{KC}{AB}$ 中至少有一个不小于 $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(2003 年国际数学奥林匹克越南国家队选拔赛试题)

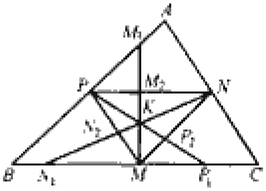


图 89

证明 (1) 如图 89，不妨设 $BC=a,AB=c,AC=b$，且 $a\geqslant c\geqslant b$.由 M,N,P 为 $\triangle ABC$ 三边中点，有

$$\frac{PM_2}{PN}=\frac{PM_2}{BM}=\frac{PM_1}{BM_1}=\frac{\frac{b+c}{2}-\frac{c}{2}}{\frac{b+c}{2}}=\frac{b}{b+c}$$

故
$$\frac{PM_2}{M_2N}=\frac{b}{c}$$

同理
$$\frac{NP_2}{P_2M}=\frac{a}{b},\frac{MN_2}{N_2P}=\frac{c}{a}$$

所以
$$\frac{PM_2}{M_2N}\cdot\frac{NP_2}{P_2M}\cdot\frac{MN_2}{N_2P}=1$$

因此，MM_1,NN_1,PP_1 交于同一点 K.

(2) 由 $\frac{PM_2}{M_2N}=\frac{b}{c}=\frac{PM}{MN}$ 知，MM_2 为 $\angle PMN$ 的平分线.

同理，NN_2,PP_2 也是 $\triangle MNP$ 的角平分线.

所以，K 为 $\triangle MNP$ 的内心.

记 p,R,r 分别为 $\triangle ABC$ 的半周长和外接圆，内切圆的半径，设 $AB=x+y,BC=y+z,CA=z+x$.则

$$r=4R\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}=\sqrt{\frac{xyz}{p}}$$

$$R^2=\frac{a^2b^2c^2}{16r^2p^2}=\frac{a^2b^2c^2}{16pxyz}$$

$$KP=\frac{r}{2\sin\frac{C}{2}}=2R\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}$$

由于 P 为 AB 的中点，则有

$$2(AK^2+BK^2)=c^2+4KP^2$$

即
$$AK^2+BK^2=\frac{1}{2}\left[c^2+\left(4R\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\right)^2\right]$$

同理可得

$$BK^2+CK^2=\frac{1}{2}\left[a^2+\left(4R\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\right)^2\right]$$

$$CK^2+AK^2=\frac{1}{2}\left[b^2+\left(4R\cdot\sin\frac{C}{2}\cdot\sin\frac{A}{2}\right)^2\right]$$

所以

$$AK^2+BK^2+CK^2=\frac{1}{4}\left(\sum a^2+16R^2\cdot\sum\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}\right)$$

假设 $AK<\frac{a}{\sqrt{3}}$，$BK<\frac{b}{\sqrt{3}}$，$CK<\frac{c}{\sqrt{3}}$，则

$$\frac{1}{3}\sum a^2>\frac{1}{4}\left(\sum a^2+16R^2\cdot\sum\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$\sum a^2>12R^2\cdot\sum(1-\cos A)(1-\cos B)=$$

$$12R^2\cdot\sum\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}\cdot\frac{b^2-(a-c)^2}{2ac}=$$

$$48R^2\cdot\sum\frac{xyz^2}{abc^2}=3\cdot\sum\frac{abz}{p}\Leftrightarrow$$

$$p\cdot\sum a^2>3\cdot\sum abz=3\cdot\sum(y+z)(z+x)z\Leftrightarrow$$

$$2(x+y+z)(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx)>$$

$$3(x+y+z)(x^2+y^2+z^2)+9xyz\Leftrightarrow$$

$$(x+y+z)(xy+yz+zx)>$$

$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)+9xyz\Leftrightarrow$$

$$\sum x^2(y+z)+3xyz>\sum x^3+6xyz\Leftrightarrow$$

$$\sum x^2(y+z)>\sum x^3+3xyz$$

由 $a\geqslant c\geqslant b$，则有 $y\geqslant z\geqslant x$，所以

$$\sum x^3+3xyz-\sum x^2(y+z)=$$

$$x(x-y)(x-z)+y(y-z)(y-x)+z(z-x)(z-y)=$$

$$x(y-x)(z-x)+(y-z)(y^2-xy-z^2+xz)=$$

$$x(y-x)(z-x)+(y-z)^2(y+z-x)\geqslant 0$$

矛盾.

故 $\frac{AK}{BC}$，$\frac{BK}{AC}$，$\frac{CK}{AB}$ 中必有一个不小于 $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

> **67** 证明：任何一个三角形可以被分割成三个多边形(包括三角形)，其中之一为钝角三角形，且能重新拼为一个矩形(多边形允许被翻转).
>
> (2003 年俄罗斯数学奥林匹克)

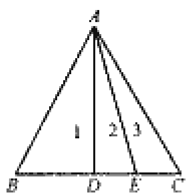


图 90

证明 若为等腰三角形(图 90)，取底边中点和底边另一点，联结顶点和底边上这两个点，把三角形分为三部分，其中之一为

钝角三角形，且能按图 91 方法拼成矩形.

若为非等腰三角形(图 92)，设 $\angle A$ 为其最大的角. 作 $AD\perp BC$ 于点 D，在线段 BD 上取点 M，使 $MD=DC$，设 BM，AB 的中点分别为 E，F，联结 EF. 则 $\triangle BEF$，$\triangle ADC$，四边形 $ADEF$ 可按图 93 方法拼成矩形，且易知 $\triangle BEF$ 为钝角三角形.

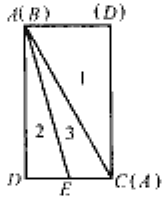


图 91

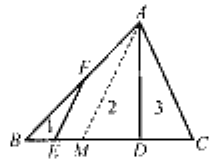


图 92

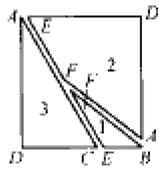


图 93

68 已知 $\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 为直角，D 为边 AC 上一点，K 为边 BD 上一点，且 $\angle ABC=\angle KAD=\angle AKD$. 证明：$BK=2DC$.

(2003 年俄罗斯数学奥林匹克)

证明 如图 94，设 $\angle ABC=\alpha$，则 $\angle KAD=\angle AKD=\alpha$，$\angle BDC=2\alpha$. 从而

$$BK=\frac{AB\cdot\sin(90^\circ-2\alpha)}{\sin\alpha}$$

$$CD=BD\cdot\cos2\alpha=\frac{AB\cdot\sin(90^\circ-\alpha)}{\sin2\alpha}\cdot\cos2\alpha$$

即证 $$\frac{\sin(90^\circ-2\alpha)}{\sin\alpha}=2\cdot\frac{\sin(90^\circ-\alpha)}{\sin2\alpha}\cdot\cos2\alpha$$

亦即证 $$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

这是显而易见的，因此 $BK=2DC$.

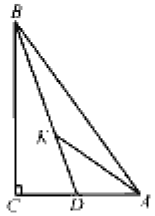


图 94

69 将平面过点 O 的 $n(n>2)$ 条直线作上标记，对于任意如上过点 O 的两条直线，总存在一条作过标记的直线平分这两条直线所成的角. 证明：这 n 条直线满足相邻直线的夹角相等.

(2003 年俄罗斯数学奥林匹克)

证明 若结论不成立，假设 n 条直线所分角中最小者为 α，与 α 相邻的角为 β，且 $\beta>\alpha$. 如图 95 所示.

因为 $\angle AOC$ 中无另外的直线，所以，关于 AA'，CC' 存在直线 DD'，使得

$$\angle COD=\frac{\pi-\alpha-\beta}{2}$$

关于 BB'，CC' 存在直线 EE'，使得

$$\angle EOA'=\frac{\pi-\beta}{2}-\alpha$$

故 $$\angle DOE=\frac{\alpha}{2}<\alpha$$

矛盾.

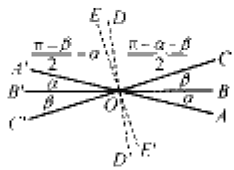


图 95

⑦⓪ 已知凸四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 上一点 K，满足 $KD = DC$，$\angle BAC = \frac{1}{2}\angle KDC$，$\angle DAC = \frac{1}{2}\angle KBC$. 证明：$\angle KDA = \angle BCA$ 或 $\angle KDA = \angle KB'A$.

（2003 年俄罗斯数学奥林匹克）

证明 首先确定 A, C, D, K 四个点满足题设. 再确定点 B 的位置.

如图 96，在 DH 上取点 O, B'，使得

$$\angle KOH = 2\beta, \angle HAB' = \alpha$$

不妨设 $OK = OC = 1$，则

$$OH = \cos 2\beta, KH = \sin 2\beta$$

从而
$$DH = \sin 2\beta \cdot \cot \alpha$$

$$AH = DH \cdot \cot \beta = 2\cos^2\beta \cdot \cot \alpha$$

$$HB' = AH \cdot \tan \alpha = 2\cos^2\beta = 1 + \cos 2\beta$$

则
$$OB' = 1, \angle KB'C = 2\beta, \angle KB'H = \beta$$

从而
$$\angle AB'K = 90° - \alpha - \beta = \angle ADK$$

另外，满足 $\angle KBC = 2\beta$ 的另一点 B，有

$$\angle KCB = \angle KB'B = 90° - \alpha - \beta = \angle ADK$$

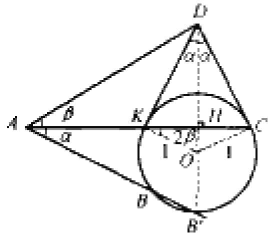


图 96

⑦① 在 $Rt\triangle ABC$ 中，$\angle A = 90°$，$\angle A$ 的平分线交边 BC 于点 D，点 D 在边 AB, AC 上的投影分别为 P, Q. 若 BQ 交 DP 于点 M，CP 交 DQ 于点 N，BQ 交 CP 于点 H，证明：(1) $PM = DN$；(2) $MN \parallel BC$；(3) $AH \perp BC$.

（2003 年罗马尼亚数学奥林匹克）

证明 如图 97.

(1) 易知，四边形 $APDQ$ 是正方形.

因为 $\triangle BPM \backsim \triangle BAQ$，$\triangle CND \backsim \triangle CPB$，$\triangle CDQ \backsim \triangle CBA$，则

$$\frac{PM}{AQ} = \frac{BP}{BA} \quad ①$$

且 $\frac{DN}{BP} = \frac{CD}{CB} = \frac{DQ}{BA}$，或

$$\frac{DN}{DQ} = \frac{BP}{BA} \quad ②$$

由 ①，② 及 $AQ = DQ$，得 $PM = DN$.

(2) 因为 $PD \parallel QC$，所以

$$\frac{PN}{NC} = \frac{DN}{NQ} \quad ③$$

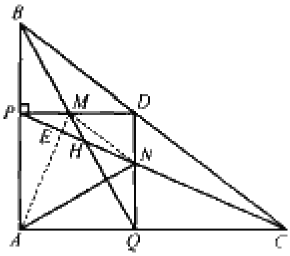


图 97

由于 $DN = PM$，$NQ = DQ - DN = PD - PM = MD$，代入③得

$$\frac{PN}{NC} = \frac{PM}{MD}$$

故 $MN \parallel BC$.

(3) $\triangle APM \cong \triangle PDN$. 设 PC 与 AM 交于点 E，则

$$\angle AEP = \angle EPM + \angle PME = \angle NPD + \angle PND = 90^\circ$$

故 $NH \perp AM$.

同理可证，$MH \perp AN$. 故 H 是 $\triangle AMN$ 的垂心，$AH \perp MN$.

由 $MN \parallel BC$ 知，$AH \perp BC$.

72 一个凸多边形 P 被它所有的对角线分成一些小凸多边形，且 P 满足：它的所有的边和对角线的长度都为有理数. 证明：所有小凸多边形的边长都是有理数.

(2003 年美国数学奥林匹克)

证明 1) 当 P 是凸四边形时，由已知，AB，BC，CD，DA 都是有理数. 如图 98 所示，设 AC，BD 交于点 E，延长 DA，CB 交于点 I，作 $AF \perp BC$，$DG \perp BC$，垂足分别为 F，G，作 $AH \perp DG$ 于点 H.

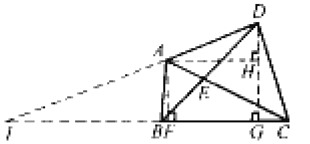


图 98

在 $\triangle ABC$ 中，设 $AB = c$，$BC = a$，$CA = b$.

则
$$BF + FC = BC = a$$

$$BF^2 - FC^2 = (AB^2 - AF^2) - (AC^2 - AF^2) = AB^2 - AC^2 = c^2 - b^2$$

两式相除得
$$BF - FC = \frac{c^2 - b^2}{a}$$

由于 $a, b, c \in \mathbf{Q}$，故

$$(BF + FC) \in \mathbf{Q}, (BF - FC) \in \mathbf{Q}$$

从而，$BF, FC \in \mathbf{Q}$. 同理，$BG, GC \in \mathbf{Q}$.

又 $AF + DH = DG$，所以

$$\sqrt{AB^2 - BF^2} + \sqrt{AD^2 - AH^2} = \sqrt{CD^2 - CG^2}$$

设 $AB^2 - BF^2 = p$，$AD^2 - AH^2 = q$，$CD^2 - CG^2 = r$，则

$$\sqrt{p} + \sqrt{q} = \sqrt{r}$$

其中，$p, q, r \in \mathbf{Q}$. 两边平方，得

$$p + q + 2\sqrt{pq} = r$$

于是，$\sqrt{pq} \in \mathbf{Q}$.

同理，$\sqrt{qr} \in \mathbf{Q}$. 进而，$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{r}} = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{qr}} \in \mathbf{Q}$.

因为 $\sqrt{p} = AF$，$\sqrt{r} = DG$，故 $\frac{AF}{DG} \in \mathbf{Q}$.

又$\frac{IA}{ID}=\frac{IF}{IG}=\frac{AF}{DG}$,从而,$\frac{IA}{ID}\in\mathbf{Q}$,$\frac{IF}{IG}\in\mathbf{Q}$.

由于 AD,$FG\in\mathbf{Q}$,且

$$\frac{IA}{ID}=1-\frac{AD}{ID},\frac{IF}{IG}=1-\frac{FG}{IG}$$

故 ID,$IG\in\mathbf{Q}$.进而,IA,IB,$IC\in\mathbf{Q}$.

因为直线 CEA 截 $\triangle IBD$,由梅涅劳斯定理,有

$$\frac{IC}{CB}\cdot\frac{BE}{ED}\cdot\frac{DA}{AI}=1$$

所以,$\frac{BE}{ED}\in\mathbf{Q}$,$BE$,$ED\in\mathbf{Q}$.

同理,AE,$EC\in\mathbf{Q}$.

2) 对凸 n 边形$A_1A_2\cdots A_n$的任一条对角线A_iA_j,设 A_iA_j 被其他对角线截得的点为 $B_1,B_2,\cdots,B_m$,只须证 $A_iB_1,B_1B_2,\cdots,B_mA_j$ 都是有理数,即 $A_iB_1,A_iB_2,\cdots,A_iA_j$ 都是有理数.

设 B_k 是A_iA_j与A_sA_t 的交点.则四边形 $A_iA_sA_jA_t$ 的各边及各对角线的长度都是有理数,由上面证法知 $A_iB_k\in\mathbf{Q}$.

又 k 是$\{1,2,\cdots,m\}$中的任意数,所以,$A_iB_1,A_iB_2,\cdots,A_iA_j$ 都是有理数,即小凸多边形的各边长都是有理数.

(73) 在锐角 $\triangle ABC$ 中,$|BC|<|AC|<|AB|$,点 D,E 分别在边 AB,AC 上,且满足 $|BD|=|BC|=|CE|$.证明:$\triangle ADE$ 的外接圆半径等于 $\triangle ABC$ 的内心到外心的距离.

(2002 年土耳其数学奥林匹克)

证明 如图 99,由欧拉公式,有

$$OI^2=R^2-2Rr$$

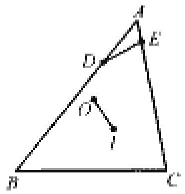


图 99

设 $\triangle ADE$ 的外接圆半径为R'.因为 $S=rp=\frac{abc}{4R}$,$r=\frac{S}{p}$,$R=\frac{abc}{4S}$,则

$$\frac{OI^2}{R^2}=1-\frac{2r}{R}=1-\frac{8S^2}{pabc}=$$

$$1-\frac{8(p-a)(p-b)(p-c)}{abc}=$$

$$\frac{a^3+b^3+c^3-a^2b-ab^2-b^2c-bc^2-a^2c-ac^2+3abc}{abc}$$

由余弦定理,有 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$DE^2=AD^2+AE^2-2AD\cdot AE\cdot\cos A=$$

$$(c-a)^2+(b-a)^2-2(c-a)(b-a)\cos A$$

则$\dfrac{DE^2}{BC^2}=$

$$\frac{1}{a^2}\left[(c-a)^2+(b-a)^2-2(c-a)(b-a)\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right]=$$

$$\frac{a^3+b^3+c^3-a^2b-b^2c-ab^2-bc^2-a^2c-ac^2+3abc}{abc}$$

故
$$\frac{DE^2}{BC^2}=\frac{OI^2}{R^2},\frac{DE}{a}=\frac{OI}{R}$$

又因为$\dfrac{DE}{\sin A}=2R'$，$\dfrac{a}{\sin A}=2R$，所以，$\dfrac{DE}{a}=\dfrac{R'}{R}$.

故 $R'=OI$.

74 设四边形 $ABCD$ 是矩形，E，F 分别是边 BC，CD 上的点，且满足 $\triangle AEF$ 是正三角形. 证明：$S_{\triangle ECF}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle AFD}$.

（2002 年澳大利亚数学奥林匹克）

证明 如图 100，设 $\angle DAF=\theta$，则 $\angle AFD=90^\circ-\theta$，$\angle EFC=30^\circ+\theta$，$\angle EAB=30^\circ-\theta$.

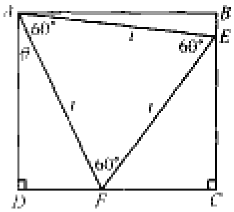


图 100

又设正 $\triangle AEF$ 的边长为 t，则

$$S_{\triangle AFD}=\frac{1}{2}AD\cdot DF=\frac{1}{2}t\cdot\sin\theta\cdot t\cdot\cos\theta=\frac{1}{4}t^2\cdot\sin 2\theta$$

$$S_{\triangle ABE}=\frac{1}{2}AB\cdot BE=\frac{1}{2}t\cdot\sin(30^\circ-\theta)\cdot t\cdot\cos(30^\circ-\theta)=\frac{1}{4}t^2\cdot\sin(60^\circ-2\theta)$$

$$S_{\triangle ECF}=\frac{1}{2}EC\cdot CF=\frac{1}{2}t\cdot\sin(\theta+30^\circ)\cdot t\cdot\cos(\theta+30^\circ)=\frac{1}{4}t^2\cdot\sin(2\theta+60^\circ)$$

因为
$$\sin 2\theta+\sin(60^\circ-2\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta=\sin(2\theta+60^\circ)$$

所以
$$S_{\triangle ECF}=S_{\triangle ABE}+S_{\triangle AFD}$$

⑦⑤ 对于由平面上任意5个点构成的集合 S，满足 S 中的任意三点不共线，设 $M(S)$ 和 $m(S)$ 分别为由 S 中的3个点构成的三角形的面积的最大值和最小值. 求 $\frac{M(S)}{m(S)}$ 的最小值.

（第43届国际数学奥林匹克预选题）

解 当这5个点是正五边形的顶点时，易知 $\frac{M(S)}{m(S)}$ 等于黄金比 $\tau=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

设 S 中的5个点分别为 A,B,C,D,E，且 $\triangle ABC$ 的面积为 $M(S)$，我们证明，存在某个三角形其面积小于等于 $\frac{M(S)}{\tau}$.

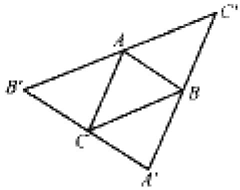


图 101

如图101，构造 $\triangle A'B'C'$，使得各边与 $\triangle ABC$ 的对应边平行，且 A,B,C 分别为 $B'C',C'A',A'B'$ 的中点，则点 D,E 在 $\triangle A'B'C'$ 的内部或边界上.

由于 $\triangle A'BC,\triangle AB'C,\triangle ABC'$ 中至少有一个三角形既不包含点 D 也不包含点 E，不妨假设 D,E 在四边形 $BCB'C'$ 内. 如图102所示.

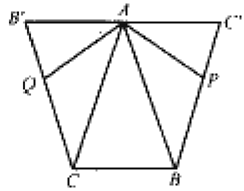


图 102

由于将图形 S 作仿射变换其比值 $\frac{M(S)}{m(S)}$ 不变，故假设 A,B,C 是正五边形 $APBCQ$ 的顶点. 因为我们可以先将 A,B,C 经仿射变换使其满足要求，于是，$\angle ABP=\angle BAC=36^\circ$，所以，$P$ 在 BC' 上. 同理，Q 在 CB' 上.

如果 D 或 E 在五边形 $APBCQ$ 中，不妨设为 D. 因为 $S_{\triangle APB}=\frac{M(S)}{\tau}$，若 D 在 $\triangle APB$ 的内部，则 $S_{\triangle DAB}\leqslant S_{\triangle APB}$.

同理，若 D 在 $\triangle AQC$ 内部，则 $S_{\triangle DAC}\leqslant S_{\triangle QAC}=S_{\triangle APB}$.

若 D 在 $\triangle ABC$ 内部，则 $S_{\triangle DAB},S_{\triangle DBC},S_{\triangle DCA}$ 中至少有一个不超过 $\frac{M(S)}{3}<\frac{M(S)}{\tau}$.

若 D 和 E 在 $\triangle APC'$ 和 $\triangle AQB'$ 中，则

$$\max\{AE,AD\}\leqslant AP=AQ$$

又因为 $0^\circ<\angle DAE\leqslant 36^\circ$（$D$ 和 E 在同一个三角形中）或 $108^\circ\leqslant\angle DAE<180^\circ$（$D$ 和 E 在两个三角形中），所以

$$S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}AD\cdot AE\cdot\sin\angle DAE\leqslant$$
$$\frac{1}{2}AP\cdot AQ\cdot\sin 108^\circ=S_{\triangle APQ}=\frac{M(S)}{\tau}$$

因此，所求最小值为 τ.

76 已知 D 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的任意一点，E 是边 AC 上的任意一点，联结 DE，F 是线段 DE 上的任意一点. 设 $\frac{AD}{AB}=x$，$\frac{AE}{AC}=y$，$\frac{DF}{DE}=z$. 证明：

(1) $S_{\triangle BDF}=(1-x)yzS_{\triangle ABC}$，$S_{\triangle CEF}=x(1-y)(1-z)S_{\triangle ABC}$；

(2) $\sqrt[3]{S_{\triangle BDF}}+\sqrt[3]{S_{\triangle CEF}}\leqslant\sqrt[3]{S_{\triangle ABC}}$.

（2003 年中国女子数学奥林匹克）

解 (1) 如图 103，有

$S_{\triangle BDF}=zS_{\triangle BDE}=z(1-x)S_{\triangle ABE}=z(1-x)yS_{\triangle ABC}$

$S_{\triangle CEF}=(1-z)S_{\triangle CDE}=(1-z)(1-y)S_{\triangle ACD}=$

$(1-z)(1-y)xS_{\triangle ABC}$

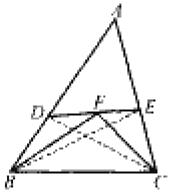


图 103

(2) 由(1)得

$$\sqrt[3]{S_{\triangle BDF}}+\sqrt[3]{S_{\triangle CEF}}=$$

$$[\sqrt[3]{(1-x)yz}+\sqrt[3]{x(1-y)(1-z)}]\sqrt[3]{S_{\triangle ABC}}\leqslant$$

$$\left[\frac{(1-x)+y+z}{3}+\frac{x+(1-y)+(1-z)}{3}\right]\sqrt[3]{S_{\triangle ABC}}=\sqrt[3]{S_{\triangle ABC}}$$

77 设 M,N 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AC,BC 上的点，且 $\angle ACB=90^\circ$. 设 AN 与 BM 交于点 L. 证明：$\triangle AML$，$\triangle BNL$ 的垂心与点 C 三点共线.

（2002 年保加利亚冬季数学竞赛）

证明 如图 104，设 $\triangle AML$ 和 $\triangle BNL$ 的垂心分别为 H_1,H_2，AH_1 与 BM 的延长线交于点 P，AC 与 LH_1 交于点 Q，BC 与 LH_2 交于点 R，BH_2 与 AN 的延长线交于点 S.

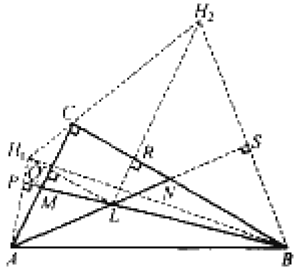


图 104

由 A,P,C,B 四点共圆，得 $\angle PAC=\angle LBC$；由 A,C,S,B 四点共圆，得 $\angle LAC=\angle SBC$. 所以，$\angle H_1AL=\angle LBH_2$.

又 $\angle PH_1L=90^\circ-\angle PLH_1=\angle BLR$，因此，$\triangle ALH_1\backsim\triangle BH_2L$.

设 $H_2R=x$，$RL=y$，于是可设 $LQ=kx$，$QH_1=ky$. 由于四边形 $QLRC$ 为矩形，所以，$CR=kx$，$CQ=y$.

因此，$\tan\angle QCH_1=k$，$\tan\angle RCH_2=\frac{1}{k}$. 故 $\angle QCH_1+\angle RCH_2=90^\circ$，即 H_1,H_2,C 三点共线.

78 设 E、F 是 $\square ABCD$ 的边 AD, CD 上的点, $\angle AEB=\angle AFB=90^\circ$, $EG/\!/AB$, 且 EG 与 BF 交于点 G. 若 AF 交 BE 于点 H, DH 交 BC 于点 I, 证明: $FI\perp GH$.

(2002 年保加利亚国家数学奥林匹克(地区级))

证明　如图 105, 设 AF 与 BC 交于点 J, K 是 I 在 AF 上的投影. 则

$$\frac{KF}{JF}=\frac{IB}{JB}=\frac{DE}{AE}=\frac{FG}{BG},\frac{KF}{KJ}=\frac{FG}{FB}$$

又　$$\angle JKI=\angle BFH=90^\circ$$

$$\angle IJK=90^\circ-\angle FBJ=\angle HBF$$

所以　$$\triangle IJK\backsim\triangle HBF,\frac{KI}{KJ}=\frac{FH}{FB}$$

从而　$$\frac{KF}{FG}=\frac{KJ}{FB}=\frac{KI}{FH}$$

又 $\angle FKI=\angle GFH=90^\circ$, 则

$$\triangle FKI\backsim\triangle GFH,\angle GHF=\angle FIK=90^\circ-\angle KFI$$

故 $FI\perp GH$.

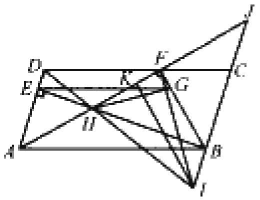


图 105

79 如图 106, 已知 $\triangle ABC$ 的 $\angle ACB$, $\angle BAC$, $\angle ABC$ 的外角平分线分别为 A_1C, B_1A, C_1B, 点 A, B, C 在 A_1C, B_1A, C_1B 上的投影分别为 A_1, B_1, C_1. 若 d 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 外接圆的直径, r 和 p 分别为 $\triangle ABC$ 的内切圆半径和半周长, 证明: $r^2+p^2=d^2$.

(2002 年保加利亚国家数学奥林匹克(决赛))

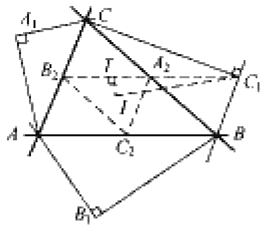


图 106

证明　设 $\triangle ABC$ 三边中点分别为 A_2, B_2, C_2, 则

$$\angle BC_1A_2=\angle A_2BC_1=90^\circ-\frac{\angle B}{2}$$

$$\angle BA_2C_1=\angle B$$

又 $\angle B_2A_2C=\angle B$, 所以, B_2, A_2, C_1 三点共线.

设 $\triangle A_2B_2C_2$ 的内切圆圆 I 与边 A_2B_2 相切于点 T, 则

$$TC_1=TA_2+A_2C_1=\frac{1}{2}(p-a)+\frac{a}{2}=\frac{p}{2}$$

所以　$$IC_1^2=IT^2+TC_1^2=\left(\frac{r}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{2}\right)^2$$

同理可得　$$IA_1^2=IB_1^2=\left(\frac{r}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{2}\right)^2$$

故 I 是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的外心, $IA_1=IB_1=IC_1=\frac{d}{2}$.

从而，$d^2 = r^2 + p^2$.

⑧⓪ 求最小的数 k，使得 $\frac{t_a + t_b}{a + b} < k$，其中 a, b 是三角形的两条边长，t_a, t_b 分别是与这两条边相对应的角平分线长.

（2002 年保加利亚国家数学奥林匹克(决赛)）

解 当 $\triangle ABC$ 满足 $a = b$，且底角 $\angle A \to 0$ 时

$$c \to 2b, \cos\frac{A}{2} \to 1$$

$$t_a = \frac{bc \cdot \sin A}{(b + c)\sin\frac{A}{2}} = \frac{2bc}{b + c} \cdot \cos\frac{A}{2}$$

于是
$$\frac{t_a + t_b}{a + b} = \frac{t_a}{a} \to \frac{4}{3}$$

所以，$k \geqslant \frac{4}{3}$. 又

$$t_a < \frac{2bc}{b + c} = 2b\left(1 - \frac{b}{b + c}\right) < 2b\left(1 - \frac{b}{b + a + b}\right) = 2b \cdot \frac{a + b}{a + 2b}$$

同理
$$t_b < 2a \cdot \frac{a + b}{2a + b}$$

所以
$$\frac{4}{3} - \frac{t_a + t_b}{a + b} > 2\left(\frac{2}{3} - \frac{b}{a + 2b} - \frac{a}{2a + b}\right) = \frac{2(a - b)^2}{3(a + 2b)(2a + b)} \geqslant 0$$

故 $\frac{t_a + t_b}{a + b} < \frac{4}{3}$. 从而，$k$ 的最小值为 $\frac{4}{3}$.

⑧① 已知 $\triangle KLM$，A 在 LK 的延长线上. 试构造矩形 $ABCD$，使得 B, C, D 分别在边 KM, LM, KL 所在的直线上.

（第 51 届捷克和斯洛伐克数学奥林匹克(决赛)）

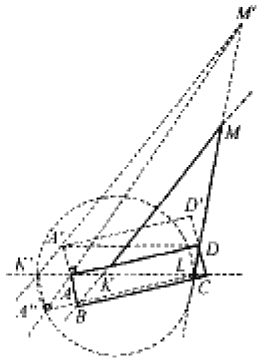


图 107

解 如图 107，设四边形 $ABCD$ 即为所求矩形，将其沿 BA 平移至矩形 $A'B'C'D'$，其中 $B' = A$，$C' = D$. 则 A' 在直线 KM 关于点 A 对称的直线 $K'M'$ 上，且 $K'M'$ 与 LK 交于点 K'，与 LM 交于点 M'. 由于 AC 在直线 KL 上，$A'C' \parallel KL$，则以点 M' 为位似中心将 $A'C'$ 变为 $K'L$，将 A 变为 A''，有 $\triangle K'A''L \backsim \triangle A'AC'$. 所以，$\angle K'A''L = \angle A'AC' = 90°$，$A''$ 在以 $K'L$ 为直径的圆上.

作 K 关于点 A 的对称点 K'，过 K' 作直线 $K'M' \parallel KM$，交 LM 于 M'. 作以 $K'L$ 为直径的圆，联结 $M'A$ 与该圆交于 A''，以 M' 为位似中心，将 A'' 变到 A 的同时，将 K' 变为 A'，将 L 变为 C'. 从而作出矩形 $A'B'C'D'$（$B' = A$），将矩形 $A'B'C'D'$ 沿 $A'B'$ 平移可得所求矩

形 $ABCD$ 满足 B,C,D 分别在边 KM,KL,LM 上.

若 M' 在以 $K'L$ 为直径的圆上，则有唯一的 A''，从而，有唯一的矩形 $ABCD$ 满足条件.

若 M' 不在以 $K'L$ 为直径的圆上，则 $M'A$ 与该圆有两个交点，从而，有两个矩形 $ABCD$ 和 $A_1B_1C_1D_1$ 满足条件，如图 108 所示.

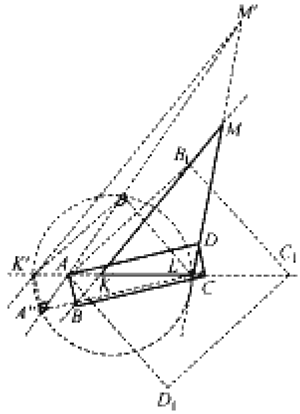


图 108

⑧② 已知 CH 是 $Rt\triangle ABC$ 的高（$\angle C=90°$），且与角平分线 AM、BN 分别交于 P,Q 两点. 证明：通过 QN、PM 中点的直线平行于斜边 AB.

（第 52 届白俄罗斯数学奥林匹克（决赛 A 类））

证明 如图 109，令 E,F 分别为 QN,PM 的中点，$a=BC$，$b=AC$，$c=AB$. 由已知得 $\frac{AN}{NC}=\frac{c}{a}$. 故 $CN=\frac{ab}{a+c}$.

又 $\frac{QH}{CQ}=\frac{HB}{a}=\frac{a}{c}$，所以，$CQ=\frac{ab}{a+c}$.

故 $CN=CQ$，$CE\perp NQ$，$\angle CEB=\angle CHB=90°$.

从而，C,E,H,B 四点共圆，得 $\angle ECH=\angle EBH=\angle EBC=\angle EHC$. 所以，$CE=EH$，$\triangle CHE$ 是等腰三角形，点 E 位于 CH 的中垂线上.

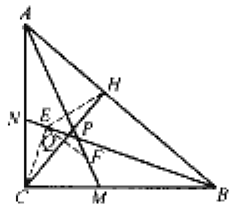


图 109

同理可得，F 位于 CH 的中垂线上.

所以，$EF\perp CH$，$EF\parallel AB$.

⑧③ 假设 $ABCD$ 是边长为 a 的正方形纸板，平面上有两条距离为 a 的平行线 l_1 和 l_2，将正方形 $ABCD$ 放在这个平面上，使得边 AB、AD 与 l_1 的交点分别为 E,F，边 CB，CD 与 l_2 的交点分别为 G,H. 设 $\triangle AEF$，$\triangle CGH$ 的周长分别为 m_1,m_2. 证明：无论怎样放置正方形纸板 $ABCD$，m_1+m_2 是定值.

（2003 年亚太地区数学奥林匹克）

证明 如图 110，设 $\angle AFE=\alpha$，$AF=k$，则 $\angle EAH_1=\angle HGC=\angle H_2CH=\alpha$，其中，$H_1,H_2$ 分别是由 A,C 向 l_1,l_2 所作垂线的垂足.

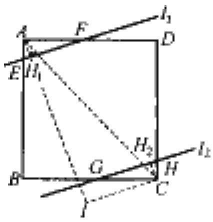


图 110

过 C 作 l_2 的平行线交 AH_1 的延长线于 I，则

$$\angle CAI=45°-\alpha$$

$$AH_1+CH_2+a=AI=AC\cdot\cos\angle CAI=$$

$$\sqrt{2}a\cdot\cos(45°-\alpha)=$$

$$a(\cos\alpha+\sin\alpha)$$

$$AH_1=k\cdot\sin\alpha$$

$$CH_2 = a(\cos\alpha + \sin\alpha - 1) - k \cdot \sin\alpha$$

$$AE = k \cdot \tan\alpha, CG = \frac{CH_2}{\sin\alpha}$$

$$EF = \frac{k}{\cos\alpha}, CH = \frac{CH_2}{\cos\alpha}$$

$$GH = \frac{CG}{\cos\alpha} = \frac{CH_2}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}$$

所以 $m_1 + m_2 = AF + AE + EF + CH + HG + GC =$

$$k + k \cdot \tan\alpha + \frac{k}{\cos\alpha} + [a(\cos\alpha + \sin\alpha - 1) - k \cdot \sin\alpha]\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha}\right) = a \cdot \frac{(\cos\alpha + \sin\alpha)^2 - 1}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = 2a$$

因此，无论怎样放置正方形纸板 $ABCD$，$m_1 + m_2$ 恒为 $2a$.

84 假设平面上的 n 个点中任意三点不共线，且满足下列性质：无论怎样将这 n 个点分别记为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，折线 $A_1A_2\cdots A_n$ 自身不相交. 求 n 的最大值.

（2003 年巴尔干地区数学奥林匹克）

解 若这 n 个点的凸包不是三角形，则取其中四点，它们组成一个凸四边形，设为 $A_1A_2A_3A_4$，且 A_1A_3 和 A_2A_4 有交点，则取这 n 个点的顺序为 $A_1A_3A_2A_4\cdots$，与题设矛盾.

故这 n 个点的凸包是三角形.

同理可证，这 n 个点的任意不少于三点的子集，它们的凸包都是三角形.

设这些点的凸包是 $\triangle A_1A_2A_3$.

当 $n = 4$ 时，A_4 在 $\triangle A_1A_2A_3$ 内，满足条件.

当 $n = 5$ 时，A_5 只能在 $\triangle A_1A_2A_4$，$\triangle A_2A_3A_4$，$\triangle A_3A_1A_4$ 中的一个内，不妨设在 $\triangle A_1A_2A_4$ 中.

考虑两个子集 $\{A_2, A_3, A_4, A_5\}$ 和 $\{A_1, A_3, A_4, A_5\}$. 由于两个子集凸包内部的 $\angle A_5A_4A_3$，只有一个大于 $180°$，不妨设在 $\{A_2, A_3, A_4, A_5\}$ 内. 则 $A_1A_3A_4A_5$ 的凸包是四边形，矛盾.

故 n 的最大值为 4.

(85) △ABC 中，O 为外心，三条高 AD，BE，CF 交于点 H，直线 ED 和 AB 交于点 M，FD 和 AC 交于点 N. 求证：(1) $OB \perp DF$，$OC \perp DE$. (2) $OH \perp MN$.

（2003 年全国高中数学联赛）

证法 1　(1) 建立直角坐标系如图 111 所示，设 $A(0,a)$，$B(b,0)$，$C(c,0)$. 则 AB 方程为

$$ax + by - ab = 0 \qquad ①$$

AC 方程为

$$ax + cy - ac = 0 \qquad ②$$

CF 方程为　$bx - ay - bc = 0$

BE 方程为　$cx - ay - bc = 0$

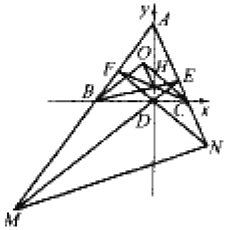


图 111

因为 BC 中垂线方程为

$$x = \frac{b+c}{2}$$

AC 中垂线方程为　$y - \frac{a}{2} = \frac{c}{a}\left(x - \frac{c}{2}\right)$

所以　$H\left(0, -\frac{bc}{a}\right)$，$O\left(\frac{b+c}{2}, \frac{a^2+bc}{2a}\right)$

又因为 FD 为过 F 的直线，其方程为

$$(ax + by - ab) + \lambda(bx - ay - bc) = 0$$

FD 过原点，所以

$$\lambda = -\frac{a}{c}$$

整理得 FD 方程为

$$(ac - ab)x + (bc + a^2)y = 0 \qquad ③$$

因为 $\angle EDC = \angle FDB$（$\angle EDC = \angle EHC$，$\angle FDB = \angle FHB$）

所以 DE 方程为

$$(ab - ac)x + (bc + a^2)y = 0 \qquad ④$$

所以　$k_{FD} \cdot k_{OB} = \frac{ab - ac}{bc + a^2} \cdot \frac{bc + a^2}{ac - ab} = -1$

故 $OB \perp DF$. 同理，$OC \perp DE$.

(2) MN 为既过 N 又过 M 的直线，故存在实数 λ_1, λ_2，使

$$\begin{cases}(ax + cy - ac) + \lambda_1[(ac - ab)x + (bc + a^2)y] = 0\\(ax + by - ab) + \lambda_2[(ab - ac)x + (bc + a^2)y] = 0\end{cases}$$

成立.

整理得

$$\begin{cases}a[1+\lambda_1(c-b)]x+[c+\lambda_1(bc+a^2)]y-ac=0\\a[1+\lambda_2(b-c)]x+[b+\lambda_2(bc+a^2)]y-ab=0\end{cases}$$

化简为

$$\begin{cases}ab[1+\lambda_1(c-b)]=ac[1+\lambda_2(b-c)]\\b[c+\lambda_1(bc+a^2)]=c[b+\lambda_2(bc+a^2)]\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}1=\lambda_1 b+c\lambda_2\\b\lambda_1=c\lambda_2\end{cases}$$

所以
$$\lambda_1=\frac{1}{2b}$$

MN 方程整理为

$$(ac+ab)x+(a^2+3bc)y-2abc=0$$

所以
$$k_{MN}\cdot k_{OH}=-\frac{ac+ab}{a^2+3ab}\cdot\frac{a^2+3bc}{ac+bc}=-1$$

故 $OH\perp MN$.

注 利用解析法直接求交点,再求斜率,也能证明本题的结论成立.

证法2 设点 H' 满足$\overrightarrow{OH'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$,则

$$\overrightarrow{AH'}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{OH'}-\overrightarrow{OA})\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=$$
$$|\overrightarrow{OC}|^2-|\overrightarrow{OB}|^2=0$$

故 $AH'\perp BC$.同理,$BH'\perp AC$.于是,H' 与 H 重合.故

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AM}=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA})\cdot\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AM}$$
(因为$(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA})\perp\overrightarrow{AM}$) $=$
$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EM})=$$
$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{EM}$$(因为$\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{EM}$) $=$
$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AE}=|\overrightarrow{OC}|\cdot|\overrightarrow{AE}|\cdot\cos(90^\circ-\angle B)=$$
$$R\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos A\cdot\sin B=$$
$$2R^2\cdot\cos A\cdot\sin B\cdot\sin C$$

同理
$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AN}=2R^2\cdot\cos A\cdot\sin B\cdot\sin C$$

所以

$$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{OH}\cdot(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM})=\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AM}=0$$

故 $OH\perp MN$.

证法3 如图112,过 M 作 $MK\parallel AC$,交 DF 延长线于点 K.下证

$$\triangle OBH\backsim\triangle NKM \quad ①$$

因为
$$\frac{MK}{\sin\angle MFK}=\frac{KF}{\sin\angle KMA}$$

又 $$\angle KMA = \angle BAC$$

所以 $$\frac{MK}{\sin C} = \frac{KF}{\sin A}$$

联结 FE.因为

$$\frac{MF}{\sin \angle FEM} = \frac{FE}{\sin \angle FME}$$

又由共圆知

$$\angle FEM = 180^\circ - 2B, \angle FME = \angle B - \angle A$$

所以 $$\frac{MF}{\sin(180^\circ - 2B)} = \frac{FE}{\sin(B - A)}$$

又 $$\frac{MA}{\sin B} = \frac{AE}{\sin(B - A)}$$

所以 $$\frac{MF}{MA} = \frac{FE}{AE} \cdot \frac{\sin 2B}{\sin B}$$

又 $$\frac{AE}{\sin C} = \frac{EF}{\sin A}$$

所以 $$\frac{MF}{MA} = 2\cos B \cdot \frac{\sin A}{\sin C}$$

因为 $MK \parallel AC$ 所以

$$\frac{KF}{KN} = \frac{MF}{MA}$$

所以 $$KF = KN \cdot 2\cos B \cdot \frac{\sin A}{\sin C}$$

所以 $$\frac{MK}{\sin C} = \frac{KF}{\sin A} = KN \cdot \frac{2\cos B}{\sin C}$$

于是 $$\frac{MK}{KN} = 2\cos B$$

又 $$\frac{BH}{OB} = \frac{2R \cdot \cos B}{R} = 2\cos B$$

所以 $$\frac{BH}{OB} = \frac{MK}{KN}$$

又 $$\angle MKN = \angle FNA = \angle C - \angle A$$

$$\angle OBH = (90^\circ - A) - (90^\circ - C) = \angle C - \angle A$$

所以 $\angle MKN = \angle OBH$.因此,$\triangle OBH \backsim \triangle NKM$.

又 $OB \perp KN$,$BH \perp KM$,所以 $OH \perp MN$.

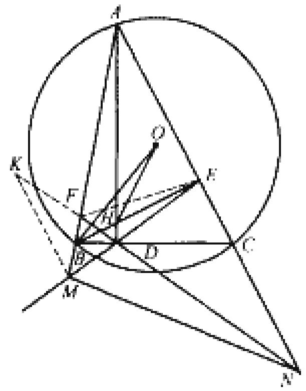


图 112

证法 4 因为 $AD \perp BC$,$CF \perp AB$,所以 A,C,D,F 四点共圆.于是,$\angle BFD = \angle C$,$\angle FDB = \angle A$.同理,$\angle EDC = \angle A$.

又因为

$$\angle BDM + \angle BMD = \angle B$$

所以 $$\angle BMD = \angle B - \angle A$$

所以 $$\frac{DM}{BD} = \frac{\sin B}{\sin(B - A)}$$

同理 $$\frac{DN}{CD} = \frac{\sin C}{\sin(C - A)}$$

故

$$\frac{\sin\angle DMN}{\sin\angle DNM}=\frac{DN}{DM}=\frac{\dfrac{CD\cdot\sin C}{\sin(C-A)}}{\dfrac{BD\cdot\sin B}{\sin(B-A)}}=\frac{CD\cdot\sin C}{BD\cdot\sin B}\cdot\frac{\sin(B-A)}{\sin(C-A)}$$

又 $\angle OBH=\angle OBC-\angle HBC=$

$$\frac{\pi-2\angle A}{2}-\left(\frac{\pi}{2}-\angle C\right)=\angle C-\angle A$$

所以 $$\sin\angle BOH=\frac{\sin(C-A)\cdot BH}{OH}$$

同理 $$\sin\angle COH=\frac{\sin(B-A)\cdot CH}{OH}$$

所以 $$\frac{\sin\angle COH}{\sin\angle BOH}=\frac{\sin(B-A)\cdot CH}{\sin(C-A)\cdot BH}$$

因为 F,B,D,H 四点共圆，且 BH 为直径，所以

$$BH\cdot\sin\angle BHD=BH\cdot\sin C=BD$$

同理 $$CH\cdot\sin B=CD$$

$$\frac{\sin\angle DMN}{\sin\angle DNM}=\frac{\sin\angle COH}{\sin\angle BOH}$$

又 $\angle DMN+\angle DNM=\angle BOC=\angle BOH+\angle COH$

所以 $$\frac{\sin(\angle BOC-\angle DNM)}{\sin\angle DNM}=\frac{\sin(\angle BOC-\angle BOH)}{\sin\angle BOH}$$

$$\sin\angle BOC\cdot\cot\angle DNM-\cos\angle BOC=$$

$$\sin\angle BOC\cdot\cot\angle BOH-\cos\angle BOC$$

即 $$\cot\angle DNM=\cot\angle BOH$$

又因为 $\angle DNM$ 和 $\angle BOH$ 均为锐角，所以 $\angle DNM=\angle BOH$. 所以 $OB\perp ND$，所以 $OH\perp MN$.

证法 5 (1) 如图 113，过 B 作圆 O 的切线 MN，有 $\angle CBN=\angle BAC$. 因为 OB 为半径，所以 $OB\perp MN$.

因为 $AD\perp BC$，$CF\perp AB$，所以 A,F,D,C 四点共圆. 故 $\angle BAC=\angle FDB$. 于是，$\angle CBN=\angle FDB$. 从而，$FD\parallel MN$. 所以 $BO\perp FD$.

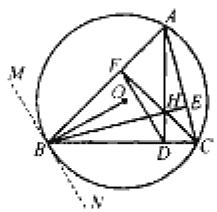


图 113

同理，$CO\perp DE$.

(2) 如图 114，联结 MH 并延长交 $\triangle ABH$ 的外接圆于 G，设圆 O 的半径为 R.

因 A,B,H,G 四点共圆，A,B,D,E 四点共圆，则

$$\angle BAD=\angle BGH,\angle BAD=\angle BED$$

所以 $$\angle BGH=\angle BED$$

因 B,C,E,M 四点共圆. 所以

$$OM^2-R^2=MB\cdot MA=MH\cdot GM(A,B,H,G\text{ 共圆})=$$

$$MH^2+GH\cdot HM=$$

$$MH^2 + BH \cdot HE(G,B,M,E\text{ 共圆}) =$$
$$MH^2 + AH \cdot HD(A,B,D,E\text{ 共圆})$$

同理 $$ON^2 - R^2 = NH^2 + AH \cdot HD$$

所以 $$OM^2 - MH^2 = ON^2 - NH^2$$

故 $OH \perp MN$.

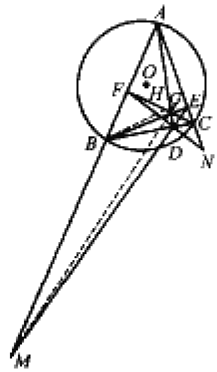


图 114

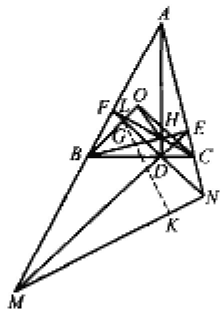


图 115

证法6　如图115,设 OB 与 FC 交于点 L,OB 与 FD 交于点 G,过 G 作 $GK \perp MN$ 于 K.不妨用 A,B,C 表示 $\triangle ABC$ 的三内角,设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R.

因为 A,E,D,B 四点共圆,$\angle AEM = \pi - B$,所以 $\angle AME = B - A$. 同理,$\angle ANF = C - A$.

在 $\triangle AME$ 中,由正弦定理得

$$AM = \frac{AE \cdot \sin B}{\sin(B - A)} = \frac{AB \cdot \cos A \cdot \sin B}{\sin(B - A)}$$

所以 $$AM = \frac{2R \cdot \sin C \cdot \cos A \cdot \sin B}{\sin(B - A)}$$

又 $$AF = AC \cdot \cos A = 2R \cdot \sin B \cdot \cos A$$

所以

$$MF = \frac{2R \cdot \sin C \cdot \cos A \cdot \sin B}{\sin(B - A)} - 2R \cdot \sin B \cdot \cos A$$

在 $\triangle AFN$ 中,由

$$FN = \frac{\sin A \cdot 2R \cdot \sin B \cdot \cos A}{\sin(C - A)}$$

有 $$\frac{MF}{FN} = \frac{[\sin C - \sin(B - A)]\sin(C - A)}{\sin A \cdot \sin(B - A)}$$

又 $$\sin C = \sin(A + B)$$

所以 $$\frac{MF}{FN} = \frac{2\cos B \cdot \sin(C - A)}{\sin(B - A)}$$

因为 A,F,D,C 四点共圆,所以 $\angle BFG = \angle C$.

因为 $\angle BFL = 90°$,又知 $FG \perp BL$,所以 $\angle FLB = \angle BFG = \angle C$.又

$$BF = BC \cdot \cos B$$

$$FL = BF \cdot \cot C = BC \cdot \cos B \cdot \cot C =$$
$$\frac{2R \cdot \sin A \cdot \cos B \cdot \cos C}{\sin C}$$

$$BL = \frac{BF}{\sin C} = \frac{2R \cdot \sin A \cdot \cos B}{\sin C}$$

所以 $$OL = OB - BL = R - \frac{2R \cdot \sin A \cdot \cos B}{\sin C} =$$
$$\frac{R \cdot \sin(B - A)}{\sin C}$$

因为 F,B,D,H 四点共圆,所以 $\angle AHF = \angle B$. 于是

$$FH = AF \cdot \cot B = AC \cdot \cos A \cdot \cot B = 2R \cdot \cos A \cdot \cos B$$

$$LH = FH - FL = 2R\left(\cos A \cdot \cos B - \frac{\sin A \cdot \cos B \cdot \cos C}{\sin C}\right) = \frac{2R \cdot \cos B \cdot \sin(C - A)}{\sin C}$$

故 $$\frac{LH}{OL} = \frac{2\cos B \cdot \sin(C - A)}{\sin(B - A)}, \frac{MF}{FN} = \frac{LH}{OL}$$

又 $\angle OLH = \angle FLB = \angle BFG = \angle BFN$，所以 $\triangle OLH \backsim \triangle NFM$。有 $\angle LOH = \angle FNM$。

又 $\angle BGD = 90^\circ$，$\angle GKN = 90^\circ$，所以 $\angle BGK = \angle FNM = \angle LOH$。所以 $OH \parallel GK$。又 $GK \perp MN$，所以 $OH \perp MN$。

证法 7 如图116，过 O 作 $OG \perp AM$ 于 G，延长 BH 交 GO 延长线于点 I，延长 OH 交 MN 于点 Q，设 FD 与 BH 交于 J。因为

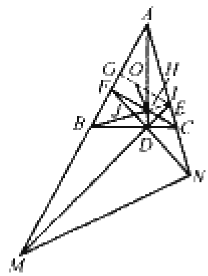


图 116

$$\angle BIG + \angle GBI = 90^\circ$$
$$\angle BAE + \angle GBI = 90^\circ$$

所以

$$\angle BIG = \angle BAE, \angle OIH = \angle MAN \quad ①$$

要证 $OH \perp MN$，只须证 G, M, Q, O 四点共圆。由①知只须证 $\triangle OIH \backsim \triangle MAN$，即证

$$OI \cdot AN = AM \cdot IH \quad ②$$

由式①得 $\angle OIB = \angle FAN$。因为

$$\angle OBI = 90^\circ - \angle BJF = 90^\circ - \angle NJE = \angle FNA$$

所以 $$\triangle OBI \backsim \triangle FNA$$

$$OI \cdot AN = AF \cdot BI \quad ③$$

由式②，③只须证 $AM \cdot IH = AF \cdot BI$，即

$$\frac{AF}{AM} = \frac{IH}{BI}$$

因为 $HF \parallel GI$，则只须证

$$\frac{AF}{AM} = \frac{GF}{GB} \quad ④$$

在 $\triangle AME$ 中 $$\frac{AM}{\sin\angle AEM} = \frac{AE}{\sin\angle AME}$$

因为

$$AM = \frac{AE \cdot \sin\angle AEM}{\sin\angle AME} \quad ⑤$$

由 $\angle AEM = 180^\circ - \angle B$ 有 $\sin\angle AEM = \sin B$。而

$$\angle AME = \angle B - \angle MDB = \angle B - \angle A$$

所以 $$\sin\angle AME = \sin(B - A)$$

代入式⑤得

$$AM = \frac{AE \cdot \sin B}{\sin(B - A)} \quad ⑤$$

将 $AE = AB \cdot \cos A, AF = AC \cdot \cos A$

$$GF = GB - BF = \frac{1}{2}AB - BC \cdot \cos B$$

代入式④，只须证

$$\frac{AC \cdot \cos A \cdot \sin(B - A)}{AB \cdot \cos A \cdot \sin B} = \frac{\frac{1}{2}AB - BC \cdot \cos B}{\frac{1}{2}AB}$$

即证 $\dfrac{AC \cdot \sin(B - A)}{\sin B} = AB - 2BC \cdot \cos B$

在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理，只要证

$$\sin B \cdot \sin(B - A) = \sin B(\sin C - 2\sin A \cdot \cos B)$$

即证 $\sin C = \sin(A + B)$. 此式显然成立.

证法 8 如图117，设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 1，分别记 EB，ED 和 OC 的交点为 P 和 Q，则由①有 $PE \perp EC$，$EQ \perp PC$. 故 $\angle OPB = \angle EPC = \angle MEN = \angle B$. 为证 $OH \perp MN$，需证 $\angle COH = \angle DMN$. 可先证 $\triangle POH \backsim \triangle EMN$，为此须证

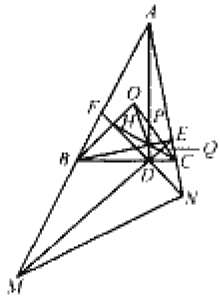


图 117

$$\frac{PO}{PH} = \frac{EM}{EN}$$

在 $\triangle POB$ 中

$$PO = \frac{OB \cdot \sin \angle OBE}{\sin \angle OPB} = \frac{\sin(C - A)}{\sin B}$$

在 $\triangle HCE$ 中

$$EH = CH \cdot \cos \angle EHC = 2\cos C \cdot \cos A$$

在 $\triangle PCE$ 中

$$EP = PC \cdot \cos \angle EPC = (OC - OP)\cos B = \left[1 - \frac{\sin(C - A)}{\sin B}\right]\cos B = 2\cos C \cdot \sin A \cdot \cot B$$

由此可得 $PH = EH - EP = 2\cos C(\cos A - \sin A \cdot \cot B) = \dfrac{2\cos C \cdot \sin(B - A)}{\sin B}$

于是 $\dfrac{PO}{PH} = \dfrac{\sin(C - A)}{2\cos C \cdot \sin(B - A)}$

又 $ED = CH \cdot \sin C = 2\cos C \cdot \sin C = \sin 2C$

在 $\triangle EDN$ 中

$$EN = \frac{ED \cdot \sin \angle EDN}{\sin \angle END} = \frac{\sin 2C \cdot \sin 2A}{\sin(C - A)}$$

$$DN=\frac{ED\cdot\sin\angle DEN}{\sin\angle END}=\frac{\sin 2C\cdot\sin B}{\sin(C-A)}$$

同理
$$DM=\frac{\sin 2B\cdot\sin C}{\sin(B-A)}$$

于是

$$EM=ED+DM=\frac{\sin C}{\sin(B-A)}[2\cos C\cdot\sin(B-A)+\sin 2B]=\frac{\sin C}{\sin(B-A)}\cdot\sin 2A$$

从而
$$\frac{EM}{EN}=\frac{\sin(C-A)}{2\cos C\cdot\sin(B-A)}$$

这就证明了$\frac{PO}{PH}=\frac{EM}{EN}$成立.

故 $\triangle POH\backsim\triangle EMN$，$\angle COH=\angle DMN$. 所以，$OH\perp MN$.

证法9 如图118，过 A 作 $AG\parallel MN$，交 NF 延长线于点 G.

因为 $\angle FDB=\angle BAE=\angle EDC=\angle BDM$，所以 BD 为 $\angle MDF$ 的内角平分线.

因为 $AD\perp BD$，所以 AD 是 $\angle MDF$ 的外角平分线. 所以

$$\frac{FA}{MA}=\frac{FD}{DM}=\frac{BF}{MB}\Rightarrow\frac{AF}{MA}=\frac{AF-BF}{AB}$$

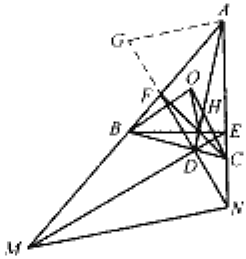


图 118

所以
$$MA=\frac{AB\cdot AF}{AF-BF}$$

$$MF=MA-AF=\frac{2AF\cdot BF}{AF-BF}$$

$$\frac{MF}{MA}=\frac{2BF}{AB}=\frac{FN}{NG}(\text{因为 } AG\parallel MN)$$

因为 $\angle DFC=\angle DAE$，所以 $\triangle FNC\backsim\triangle AND$. 有 $\frac{AD}{FC}=\frac{AN}{FN}$.

于是

$$\frac{AN}{NG}=\frac{2BF\cdot AD}{AB\cdot FC}=2\sin B\cdot\cot B=2\cos B$$

而
$$\frac{BH}{\sin\angle BCF}=\frac{BC}{\sin\angle BHC}=\frac{BC}{\sin\angle BAC}=2BO$$

则
$$\frac{BH}{BO}=2\sin\angle BCF=2\cos B$$

从而
$$\frac{BH}{BO}=\frac{AN}{NG}$$

又
$$\angle OBH=\angle ABC-\angle ABO-\angle CBE=\angle ABC-\left(\frac{\pi}{2}-\angle ACB\right)-\left(\frac{\pi}{2}-\angle ACB\right)=\angle ACB-\angle BAC$$

则 $\angle ANG=\angle ACB-\angle NDC=\angle ACB-\angle BAC=\angle OBH$

故 $\triangle BOH\backsim\triangle NGA$.

因为 $OB \perp FN$，$BH \perp AN$，所以 $OH \perp AG$，则 $OH \perp MN$.

证法 10　(1) 因为 A,C,D,F 四点共圆，所以 $\angle BDF = \angle BAC$. 又因为

$$\angle DBC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BDC) = 90^\circ - \angle BAC$$

所以 $OB \perp DF$. 同理，$OC \perp DE$.

(2) 因为 $CF \perp MA$，所以

$$MC^2 - MH^2 = AC^2 - AH^2 \quad ①$$

由 $BE \perp NA$，有

$$NB^2 - NH^2 = AB^2 - AH^2 \quad ②$$

由 $DA \perp BC$，有

$$BD^2 - CD^2 = BA^2 - AC^2 \quad ③$$

由 $OB \perp DF$，有

$$BN^2 - BD^2 = ON^2 - OD^2 \quad ④$$

由 $OC \perp DE$，有

$$CM^2 - CD^2 = OM^2 - OD^2 \quad ⑤$$

① - ② + ③ + ④ - ⑤，得

$$NH^2 - MH^2 = ON^2 - OM^2$$

即

$$MO^2 - MH^2 = NO^2 - NH^2$$

所以 $OH \perp MN$.

---

(86) 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a,b,c，点 P 在 $\triangle ABC$ 的内部，P 到三条边的距离分别为 p,q,r. 证明：

$$R \leqslant \frac{a^2 + b^2 + c^2}{18\sqrt[3]{pqr}}$$

其中 R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径，并确定等号成立的条件.

(2004 年泰国数学奥林匹克)

证明　设 $\triangle ABC$ 的面积为 S，则

$$S = S_{\triangle PBC} + S_{\triangle PCA} + S_{\triangle PAB} = \frac{1}{2}(pa + qb + rc)$$

由均值不等式有

$$\sqrt[3]{pqr} = \frac{\sqrt[3]{pa \cdot qb \cdot rc}}{\sqrt[3]{abc}} \leqslant \frac{pa + qb + rc}{3\sqrt[3]{abc}} = \frac{2S}{3\sqrt[3]{abc}} \quad ①$$

故只须证

$$R \leqslant \frac{(a^2 + b^2 + c^2)\sqrt[3]{abc}}{12S}$$

又因为

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \quad ②$$

所以,只须证

$$R \leqslant \frac{abc}{4S} \quad ③$$

而 $4SR = 2Rab\sin C = abc$,所以,式③成立.因此,原不等式成立.

式①的等号成立的条件是 $pa = qb = rc$,式②的等号成立的条件是 $a = b = c$,所以,原不等式等号成立的条件是 $a = b = c$ 且 $p = q = r$,即 $\triangle ABC$ 是正三角形且 P 是 $\triangle ABC$ 的中心.

> 87 已知 $\triangle ABC$ 覆盖凸多边形 M.证明:存在一个与 $\triangle ABC$ 全等的三角形,能够覆盖 M,并且它的一条边所在的直线与 M 的一条边所在的直线平行或者重合.(李伟固供题)
>
> (2006 年中国国家集训队训练题)

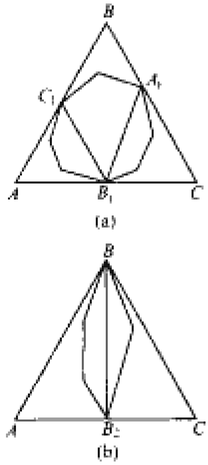


图 119

证明 首先我们不妨设 M 有三个顶点位于 $\triangle ABC$ 的边上,如图 119(a) 所示,或 M 有一个顶点与 $\triangle ABC$ 的某顶点重合(比如 B),M 的另一顶点位于点 B 的对边上,如图 119(b) 所示.

设初始状态下 $\angle AC_1B_1 = \theta_0$,我们分别将 M 绕 C_1 顺时针和逆时针旋转.设顺时针转 δ_1 时 M 第一次出现某一边与 $\triangle ABC$ 某一边平行,逆时针转 δ_2 时 M 第一次出现某一边与 $\triangle ABC$ 某一边平行.对 $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$,$\theta_1 = \theta_0 - \delta_1$,$\theta_2 = \theta_0 + \delta_2$,设 M 首先绕 C_1 旋转到相应的 θ 角度,然后再分别作以 A 和 B 为中心的位似变换,使得 M 的像(记为 M_θ)的相应的两顶点重新分别位于 AC 和 BC 上.设 $C_1B_1 = mf(\theta)$,$A_1B_1 = nf(\theta)$,$f(\theta_0) = 1$,其中 m, n 分别是初始状态下相应的距离.令 $\varphi = \angle B + \angle C_1B_1A_1$(为定值),则

$$AC = AB_1 + B_1C = \frac{mf(\theta)\sin\theta}{\sin A} + \frac{nf(\theta)}{\sin C}\sin(\varphi - \theta)$$

故

$$f(\theta) = \frac{AC\sin A \cdot \sin C}{m\sin\theta \cdot \sin C + n\sin(\varphi-\theta)\cdot\sin A} = \frac{AC\sin A \cdot \sin C}{a\sin(\theta+\varphi_1)}$$

其中 a, φ_1 为常数.由于 $\sin(\theta+\varphi_1)$ 为上凸函数,故其必然在端点达到最小值.故 $\max\{f(\theta_1), f(\theta_2)\} \geqslant f(\theta_0) = 1$,故 M_{θ_1} 或 M_{θ_2} 与 M 相比似例常数不小于 1,并且位于 $\triangle ABC$ 中,由此即证得了结论.

对于第二种情况可以类似讨论.设 $BB_2 = mf(\theta)$,$f(\theta_0) = 1$,则

$$AB_2 = \frac{BB_2}{\sin A} \cdot \sin \theta$$

$$CB_2 = \frac{BB_2}{\sin C} \cdot \sin(B - \theta)$$

从而
$$AC = \frac{mf(\theta)\sin \theta}{\sin A} + \frac{mf(\theta)}{\sin C}\sin(B - \theta) = \frac{f(\theta)\,a\sin(\theta + \varphi_2)}{\sin A \cdot \sin C}$$

其中 a,φ_2 都是常数.故

$$f(\theta) = \frac{AC\sin A \cdot \sin C}{a\ \sin(\theta + \varphi_2)}$$

与前一种情形相同地可得出证明.

88 设 P 是一个凸多边形.证明:在 P 内存在一个凸六边形,其面积至少是 P 的面积的 $\frac{3}{4}$.

(第 45 届国际数学奥林匹克预选题)

解 任取两条互相平行的凸多边形 P 的支撑线 s,t(即凸多边形 P 在直线 s,t 同一侧,P 与直线 s,t 有公共点),设 S,T 分别为凸多边形 P 与直线 s,t 的交点.于是,线段 ST 将 P 分成两部分,分别设为 P' 和 P''.设 K,L 是凸多边形 P' 边界上的点,满足 $KL \parallel ST$,且 $KL = \frac{ST}{2}$.

下面只须证明梯形 $SKLT$ 的面积至少是凸多边形 P' 面积的 $\frac{3}{4}$ 即可.

因为同理在 P'' 中产生的梯形的面积也至少是 P'' 面积的 $\frac{3}{4}$,这两个梯形合起来就是一个凸六边形.

过点 K,L 分别作 P' 的支撑线,且这两条支撑线交于点 Z.假设点 K 到直线 s 的距离小于点 L 到直线 s 的距离.设 ZK 交直线 s 于 X,ZL 交直线 t 于 Y.过点 Z 且平行于 ST 的直线分别交直线 s,t 于 A、B.显然,P' 包含在五边形 $SXZYT$ 中.

于是,只要证明

$$S_{梯形SKLT} \geqslant \frac{3}{4} S_{五边形SXZYT} \quad ①$$

设 $AZ = a$,$BZ = b$,设点 K,X,Y,S 到直线 AB 的距离分别为 k,x,y,d.分别过 K,L 作直线 $KU \parallel LV \parallel s \parallel t$,交 AB 于 U,V.则有

$$\frac{a+b}{2}=KL=UZ+ZV=\frac{ak}{x}+\frac{bk}{y} \qquad ②$$

由于

$$S_{梯形SKLT}=\frac{3}{4}(a+b)(d-k)$$

$$S_{五边形SXZYT}=S_{▱SABT}-S_{\triangle AXZ}-S_{\triangle BYZ}=$$

$$(a+b)d-\frac{ax}{2}-\frac{by}{2}$$

代入式①,即只要证

$$ax+by-2(a+b)k\geqslant 0 \qquad ③$$

由式②得

$$k=\frac{(a+b)xy}{2(ay+bx)}$$

代入式③的左端,可得

$$ax+by-2(a+b)k=\frac{ab(x-y)^2}{ay+bx}\geqslant 0$$

因此,原命题成立.

89 设 K,M 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的两点,L,N 是边 AC 上的两点,K 在 M,B 之间,L 在 N,C 之间,且 $\frac{BK}{KM}=\frac{CL}{LN}$.求证:$\triangle ABC,\triangle AKL,\triangle AMN$ 的垂心在一条直线上.

(2006年中国国家集训队训练题)

证明 设 $\triangle ABC,\triangle AKL,\triangle AMN$ 的垂心分别为 H_1,H_2,H_3.若 H_1,H_2,H_3 有两点重合,显然它们共线;若 H_1,H_2,H_3 两两不同,过点 M 作 AC 的垂线,交直线 H_1H_2 于 H'_3.

过 N 作 AB 的垂线交直线 H_1H_2 于 H''_3.因为

$$\overrightarrow{MH_3}\perp\overrightarrow{AC},\overrightarrow{KH_2}\perp\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BH_1}\perp\overrightarrow{AC}$$

所以

$$\overrightarrow{MH'_3}\parallel\overrightarrow{KH_2}\parallel\overrightarrow{BH_1}$$

从而

$$\overrightarrow{H_2H'_3}=\frac{KM}{BK}\overrightarrow{H_1H_2}$$

同理

$$\overrightarrow{H_2H''_3}=\frac{LN}{CL}\overrightarrow{H_1H_2}$$

又

$$\frac{KM}{BK}=\frac{LN}{CL}$$

所以

$$\overrightarrow{H_2H'_3}=\overrightarrow{H_2H''_3}$$

即 H'_3,H''_3 是同一点,它是过 M 的 AC 的垂线和过 N 的 AB 的垂线的交点.所以 H_3,H'_3,H''_3 是同一点.从而 H_1,H_2,H_3 共线.

90 设点 O 是锐角 $\triangle ABC$ 的外心，$\angle B < \angle C$，直线 AO 交边 BC 于点 D，$\triangle ABD$，$\triangle ACD$ 的外心分别为点 E，F. 延长 BA 和 CA，在延长线上分别取点 G，H，使得 $AG = AC$，$AH = AB$. 证明：四边形 $EFGH$ 是矩形的充分必要条件是 $\angle ACB - \angle ABC = 60^\circ$.

（第 45 届国际数学奥林匹克预选题）

证明 如图 120，设 $\angle ABC = \beta$，$\angle ACB = \gamma$，则 $\beta < \gamma$. 因为 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，点 O 在 $\triangle ABC$ 的内部，所以

$$\angle OAC = 90^\circ - \beta$$

于是，有

$$\angle ADB = \angle DAC + \angle ACD = 90^\circ - \beta + \gamma > 90^\circ$$

故 $\triangle ABD$ 是钝角三角形，$\triangle ACD$ 是锐角三角形，点 E 在 $\triangle ABD$ 的外部，点 F 在 $\triangle ACD$ 的内部，点 O，E 在 AB 的异侧.

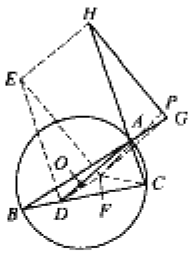


图 120

因为点 F，O 分别是 $\triangle ACD$，$\triangle ABC$ 的外心，则

$$\angle FAC = 90^\circ - \angle ADC = \angle ADB - 90^\circ = \gamma - \beta$$

$$\angle FDC = 90^\circ - \angle OAC = \beta$$

于是，$FD \parallel AB$.

同理，$ED \parallel AC$.

设 DA 与 GH 的交点为 P，则

$$\angle PAH = \angle OAC = 90^\circ - \beta$$

另一方面，$\angle PHA = \angle ABC = \beta$（因为 $\triangle ABC \cong \triangle AHG$），所以，$\angle APH = 90^\circ$，即 $AD \perp GH$.

又因为 EF 是 AD 的中垂线，所以，$AD \perp EF$.

因此，$GH \parallel EF$.

故 $\triangle AGH$ 和 $\triangle DFE$ 的对应边平行，则要么 HE 和 GF 的交点在 AD 上，要么 HE 和 GF 均平行于 AD.

由于 EF 和 GH 均垂直于 AD，所以，四边形 $EFGH$ 是矩形的充分必要条件最后一种情形成立，此时，等价于 $\triangle AGH \cong \triangle DFE$，即等价于 $DF = AG$.

又由于点 F 是 $\triangle ACD$ 的外心，$AG = AC$，所以

$$AC = AG = DF = AF = CF$$

故 $\triangle ACF$ 是正三角形，等价于 $DF = AG$.

因为 $\triangle ACF$ 是以 AC 为底边的等腰三角形，所以，$\triangle ACF$ 是正三角形的充分必要条件是 $\angle FAC = 60^\circ$，即 $\gamma - \beta = 60^\circ$.

91 如图121所示，在$\triangle ABC$中，$\angle ABC=90°$，D，G是边CA上的两点，联结BD，BG. 过点A，G分别作BD的垂线，垂足分别为E，F，联结CF. 已知$BE=EF$，求证：$\angle ABG=\angle DFC$.（熊斌供题）

（2006年第3届中国东南地区数学奥林匹克）

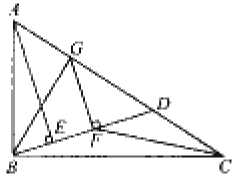


图121

证法1 作$GM\perp AB$于M，设AE与BG的交点为K，联结KM. 由$BE=EF$，及$AE\parallel GF$知，K为$Rt\triangle BGM$斜边BG上的中线，所以$BK=KG=MK$，$\angle ABG=\angle BMK$. 因为

$$BF\cdot AK=4S_{\triangle ABK}=2S_{\triangle ABG}=AB\cdot MG$$

又$MG\parallel BC$，所以

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AM}{MG}$$

故
$$AB\cdot MG=BC\cdot AM$$

所以
$$BF\cdot AK=BC\cdot AM$$

即
$$\frac{BF}{BC}=\frac{AM}{AK}$$

结合$\angle KAB=\angle CBD$，知$\triangle KAM\backsim\triangle CBF$，所以$\angle AMK=\angle CFB$，于是$\angle BMK=\angle CFD$，故$\angle ABG=\angle DFC$.

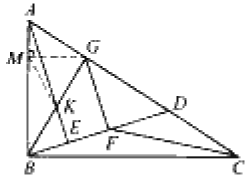


图122

证法2 作$Rt\triangle ABC$的外接圆ω，延长BD，AE分别交ω于K，J.

联结BJ，CJ，KJ，FJ. 易知$\angle BAJ=\angle KBC$，故$BJ=KC$. 于是四边形$BJCK$是等腰梯形，又AJ垂直平分BF，故$BJ=FJ$，故四边形$FJCK$是平行四边形.

设AE与BG的交点为M，FC与JK的交点为N，则M，N分别是BG和FC的中点，于是

$$\frac{AB}{AG}=\frac{\sin\angle MAG}{\sin\angle BAM}=\frac{\sin\angle JKC}{\sin\angle BKJ}=\frac{FK}{CK}$$

又$\angle BAG=\angle FKC$，于是$\triangle BAG\backsim\triangle FKC$，所以

$$\angle ABG=\angle DFC$$

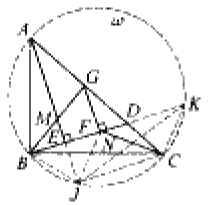


图123

92 在$\triangle ABC$中，P，Q分别是边AB，AC上的点，且使得$\angle APC=\angle AQB=45°$. 过点$P$作边$AB$的垂线与$BQ$交于点$S$，过点$Q$作边$AC$的垂线与$CP$交于点$R$. 设$D$是$BC$上的点，且使得$AD\perp BC$. 证明：$PS$，$AD$，$QR$三线共点，且$SR\parallel BC$.

（第7届香港数学奥林匹克）

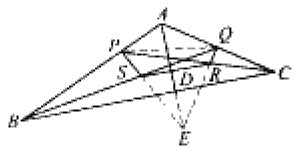


图124

解 如图124，设QR，AD的延长线交于E.

下面证明直线 PE 和 PS 重合.

注意到

$$\angle ABQ = 135^\circ - \angle BAC = \angle ACP$$

则 B,P,Q,C 四点共圆.

于是,$\angle APQ = \angle ACB$.

又 $\angle AEQ = 90^\circ - \angle EAC = \angle ACB$,从而,$A,P,E,Q$ 四点共圆.于是

$$\angle APE = 180^\circ - \angle AQE = 90^\circ$$

所以,$PE \perp AB$.

因此,PE,PS 重合且 PS,AD,QR 三线共点.

由 $\angle BQE = 90^\circ - 45^\circ = \angle CPE$,知 P,Q,R,S 四点共圆.从而

$$\angle QPR = \angle QSR$$

因为 B,P,Q,C 四点共圆,所以

$$\angle QPR = \angle QBC$$

因此,$\angle QBC = \angle QSR$,即 $SR /\!/ BC$.

例 5 在等腰直角 $\triangle ABC$ 中,$CA = CB = 1$,点 P 是 $\triangle ABC$ 边界上任意一点,求 $PA \cdot PB \cdot PC$ 的最大值.(李伟固供题)

(2005 年第 5 届中国西部数学奥林匹克)

解法 1　首先证明取到最大值只有当 $P \in AB$ 时,才可能取到.

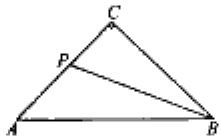


图 125

(1) 如图 125,当 $P \in AC$ 时,有

$$PA \cdot PC \leqslant \frac{1}{4}, PB \leqslant \sqrt{2}$$

故

$$PA \cdot PB \cdot PC \leqslant \frac{\sqrt{2}}{4}$$

其中等号不成立(因为两个等号不可能同时成立),即

$$PA \cdot PB \cdot PC < \frac{\sqrt{2}}{4}$$

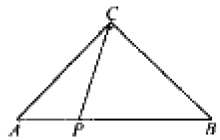


图 126

(2) 如图 126,当 $P \in AB$ 时,设 $AP = x \in [0,\sqrt{2}]$,则

$$f(x) = PA^2 \cdot PB^2 \cdot PC^2 = x^2(\sqrt{2} - x)^2(1 + x^2 - \sqrt{2}x)$$

令 $t = x(\sqrt{2} - x)$,则 $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$,$f(x) = g(t) = t^2(1 - t)$.注意到 $g'(t) = 2t - 3t^2 = t(2 - 3t)$,故 $g(t)$ 在 $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ 上递增,所以 $f(x) \leqslant g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{8}$,故 $PA \cdot PB \cdot PC \leqslant \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$,等号成

立当且仅当 $t=\frac{1}{2}, x=\frac{\sqrt{2}}{2}$，即 P 为 AB 的中点时取等号.

解法 2 (1) 如图 127，当 P 在线段 AB 上时，过 C 作 $CD\perp AB$ 于 D.

设 $PD=a$，则

$$PA\cdot PB=\frac{1}{2}-a^2, PC=\sqrt{\frac{1}{2}+a^2}$$

所以

$$PA\cdot PB\cdot PC=\left(\frac{1}{2}-a^2\right)\sqrt{\frac{1}{2}+a^2}\leqslant \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}-a^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+a^2}\leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

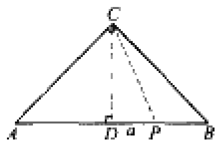


图 127

当 $a=0$ 时，上式取等号.

(2) 如图 128，当 P 在直角边上时，不妨设 P 在 BC 上，记 $PC=b$，则

$$PA\cdot PB\cdot PC=b(1-b)\sqrt{1+b^2}\leqslant \left(\frac{b+1-b}{2}\right)^2\sqrt{1+b^2}=\frac{1}{4}\sqrt{1+b^2}\leqslant\frac{1}{4}\sqrt{1+1^2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

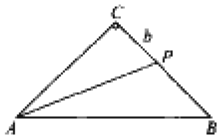


图 128

上式显然不能取等号.

因此 $PA\cdot PB\cdot PC$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{2}}{4}$. 当 P 在 AB 中点时取等号.

> **94** 已知正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$，定义点 $B_1, B_2, \cdots, B_{n-1}$ 如下：
>
> (1) 如果 $i=1$ 或 $i=n-1$，则 B_i 是边 A_iA_{i+1} 的中点；
>
> (2) 如果 $i\neq 1, i\neq n-1$，S_i 是 A_1A_{i+1} 和 A_nA_i 的交点，则 B_i 是 $\angle A_iS_iA_{i+1}$ 的角平分线与 A_iA_{i+1} 的交点.
>
> 证明：$\angle A_1B_1A_n+\angle A_1B_2A_n+\cdots+\angle A_1B_{n-1}A_n=180^\circ$.
>
> (第 45 届国际数学奥林匹克预选题)

解 先证明下面的引理：如图 129 所示，设四边形 $ABCD$ 是上下底分别为 AB 和 CD 的等腰梯形，对角线 AC 和 BD 交于点 S，M 是边 BC 的中点，$\angle BSC$ 的角平分线交 BC 于 N.

引理的证明：只须证明 A, D, M, N 四点共圆. 如图 129，设 AD 与 BC 不平行，且交于点 X. 设 $XA=XB=a, XC=XD=b$. 于是

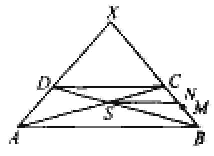


图 129

$$\frac{BN}{CN}=\frac{BS}{CS}=\frac{AB}{CD}=\frac{XA}{XD}=\frac{a}{b}$$

所以
$$\frac{BN+CN}{CN}=\frac{a+b}{b}$$

又因为 $BN+CN=BC=a-b$，所以

$$CN=\frac{(a-b)b}{a+b},XN=\frac{2ab}{a+b}$$

由于 $XM=\frac{a+b}{2}$，因此

$$XM\cdot XN=ab=XA\cdot XD$$

故 A,D,M,N 四点共圆.

现在证明原命题.

设 C_i 是边 A_iA_{i+1} 的中点，其中 $i=1,2,\cdots,n-1$. 对于 $1<i<n-1$，四边形 $A_1A_iA_{i+1}A_n$ 要么是一个以 A_1A_n 和 A_iA_{i+1} 为腰的等腰梯形，要么是一个矩形. 第一种情况，由引理可得 $\angle A_1B_iA_n=\angle A_1C_iA_n$. 第二种情况，$B_i=C_i$，结论仍然正确. 于是，有

$$\angle A_1B_1A_n+\angle A_1B_2A_n+\cdots+\angle A_1B_{n-1}A_n=$$
$$\angle A_1C_1A_n+\angle A_1C_2A_n+\cdots+\angle A_1C_{n-1}A_n$$

因为 $A_1A_2\cdots A_n$ 是正 n 边形，所以，对于每一个 i，$i=2,3,\cdots,n-1$，都有

$$\triangle A_1C_iA_n\cong\triangle A_{n+2-i}C_1A_{n+1-i}$$

故 $\angle A_1C_iA_n=\angle A_{n+2-i}C_1A_{n+1-i}$，$i=2,3,\cdots,n$

于是，有

$$\angle A_1C_1A_n+\angle A_1C_2A_n+\cdots+\angle A_1C_{n-1}A_n=$$
$$\angle A_1C_1A_n+\angle A_nC_1A_{n-1}+\cdots+\angle A_3C_1A_2=180^\circ$$

因此，原命题成立.

95 给定实数 $a,b,a>b>0$，将长为 a 宽为 b 的矩形放入一个正方形内(包含边界)，问正方形的边至少为多长?(陈永高供题)

(2005 年第 4 届中国女子数学奥林匹克)

解　设长方形为 $ABCD$，$AB=a$，$BC=b$，中心为 O.

以 O 为原点，建立直角坐标系，x 轴，y 轴分别与正方形的边平行.

(1) 如图 130，线段 BC 与坐标轴不相交. 不妨设 BC 在第一象限内

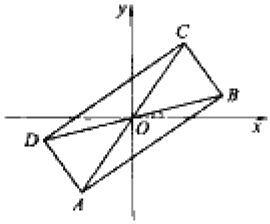


图 130

$$\angle BOx\leqslant\frac{1}{2}(90^\circ-\angle BOC)$$

此时正方形的边长大于等于

$$BD\cdot\cos\angle BOx \geqslant BD\cdot\cos\frac{90^\circ-\angle BOC}{2}=$$

$$BD\cdot\cos 45^\circ\cdot\cos\frac{1}{2}\angle BOC+$$

$$BD\cdot\sin 45^\circ\cdot\sin\frac{1}{2}\angle BOC=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$$

所以此时所在正方形边长至少为$\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

(2) 如图131,线段 BC 与坐标轴相交.不妨设 BC 与 x 轴相交,不妨设 $\angle COx\leqslant\frac{1}{2}\angle COB$.

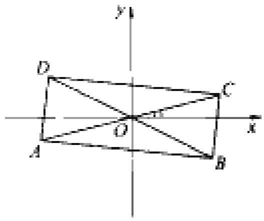


图 131

此时正方形的边长大于等于

$$AC\cdot\cos\angle COx\geqslant AC\cdot\cos\frac{\angle COB}{2}=a$$

所以此时所在的正方形边长至少为 a.

比较情形,(1),(2) 中结论知:

若 $a<(\sqrt{2}+1)b$,则正方形的边长至少为 a.

若 $a\geqslant(\sqrt{2}+1)b$,则正方形的边长至少为$\frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

96 证明:三角形的三条中线的和大于其三边之和的$\frac{3}{4}$倍.

(2005 年第 18 届爱尔兰数学奥林匹克)

证明 如图132,设 $\triangle ABC$ 的三条中线分别是 AD,BE,CF,它们交于重心 G.

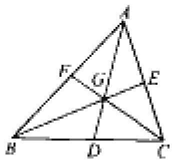


图 132

因为

$$GA+GB>AB$$
$$GB+GC>BC$$
$$GC+GA>CA$$

三式相加得

$$2(GA+GB+GC)>AB+BC+CA$$

又 $GA=\frac{2}{3}AD,GB=\frac{2}{3}BE,GC=\frac{2}{3}CF$,则

$$\frac{4}{3}(AD+BE+CF)>AB+BC+CA$$

故
$$AD+BE+CF>\frac{3}{4}(AB+BC+CA)$$

97 已知 $\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 上各有一点 D,E,F，且满足 AD,BE,CF 交于一点 G. 若 $\triangle AGE$，$\triangle CGD$，$\triangle BGF$ 的面积相等. 证明：G 是 $\triangle ABC$ 的重心.

（2005 年第 18 届爱尔兰数学奥林匹克）

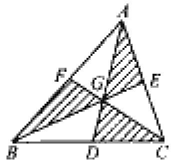


图 133

解 如图 133，设 $\frac{AF}{FB}=x,\frac{BD}{DC}=y,\frac{CE}{EA}=z$.

由塞瓦定理得

$$xyz=1$$

对于 $\triangle BFC$ 和直线 AGD 应用梅涅劳斯定理有

$$\frac{FG}{GC}\cdot\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BA}{AF}=1$$

则 $$\frac{FG}{GC}=\frac{BD}{DC}\cdot\frac{AF}{BA}=y\cdot\frac{x}{1+x}=\frac{xy}{1+x}$$

所以 $$\frac{FG}{FC}=\frac{xy}{1+x+xy}$$

故 $$S_{\triangle BFG}=\frac{FG}{FC}S_{\triangle BFC}=\frac{FG}{FC}\cdot\frac{BF}{AB}S_{\triangle ABC}=$$

$$\frac{xy}{(1+x+xy)(1+x)}S_{\triangle ABC}$$

同理 $$S_{\triangle CDG}=\frac{yz}{(1+y+yz)(1+y)}S_{\triangle ABC}$$

于是 $$\frac{xy}{(1+x+xy)(1+x)}=\frac{yz}{(1+y+yz)(1+y)}$$

即 $$x(1+y+yz)(1+y)=z(1+x+xy)(1+x)$$

因为 $$x(1+y+yz)=x+xy+xyz=x+xy+1$$

所以 $$1+y=z(1+x)=z+zx$$

同理 $$1+z=x+xy,1+x=y+yz$$

三式相加得

$$3=xy+yz+zx\geqslant 3\sqrt[3]{xy\cdot yz\cdot zx}=3$$

当且仅当 $xy=yz=zx$ 时，上式等号成立.

所以，$xy=yz=zx$.

从而，$x=y=z$.

又 $xyz=1$，则 $x=y=z=1$.

因此，D，E，F 是三边的中点.

故 G 是 $\triangle ABC$ 的重心.

⑨⑧ 如图134，四边形 $ABCD$ 中，点 P 满足 $\angle PAB=\angle CAD$，$\angle PCB=\angle ACD$，O_1，O_2 分别是 $\triangle ABC$，$\triangle ADC$ 的外心．求证：$\triangle PO_1B \backsim \triangle PO_2D$．

（2006年中国国家集训队训练题）

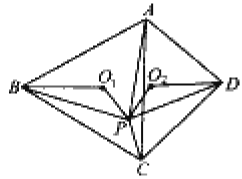


图 134

证法1 （田廷彦提供）

如图135，延长 CP 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 Q．联结 QA，QB，QO_1，AO_2．

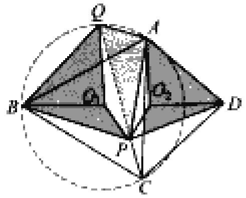


图 135

在等腰 $\triangle O_1BQ$ 和等腰 $\triangle O_2AD$ 中，由于 $\angle BO_1Q=2\angle BCQ=2\angle ACD=\angle AO_2D$，故

$$\triangle O_1BQ \backsim \triangle O_2AD \quad ①$$

又在 $\triangle PAQ$ 中，由正弦定理

$$\frac{PQ}{PA}=\frac{\sin\angle PAQ}{\sin\angle PQA}=\frac{\sin(\angle PAB+\angle BAQ)}{\sin\angle CBA}=$$

$$\frac{\sin(\angle DAC+\angle BCQ)}{\sin\angle CBA}=\frac{\sin(\angle DAC+\angle DCA)}{\sin\angle CBA}=$$

$$\frac{\sin(180^\circ-\angle CDA)}{\sin\angle CBA}=\frac{\sin\angle CDA}{\sin\angle CBA}=\frac{\frac{AC}{R_2}}{\frac{AC}{R_1}}=\frac{R_1}{R_2}$$

其中 R_1，R_2 分别是 $\triangle BAC$ 和 $\triangle DAC$ 的外接圆半径．

而

$$BQ=2R_1\sin\angle BCQ,\ DA=2R_2\sin\angle ACD$$

故

$$\frac{BQ}{DA}=\frac{R_1}{R_2}$$

由此

$$\frac{PQ}{PA}=\frac{BQ}{DA}$$

又

$$\angle BQP=\angle BAC=\angle PAD$$

所以

$$\triangle PQB \backsim \triangle PAD \quad ②$$

由①，②，即可知 O_1，O_2 是相似三角形 PQB 和 PAD 中的对应点，从而得 $\triangle PBO_1 \backsim \triangle PDO_2$．证毕．

证法2 （柳智宇提供）

如图，延长线段 AP，CP 分别交 $\triangle ACD$ 的外接圆于 C'，A'．

首先证明 $\triangle DA'C' \backsim \triangle BAC$，而 O_1，O_2 分别是这两个三角形的外心．然后说明 P 是这对相似三角形中的对应点，从而 $\triangle PBO_1 \backsim \triangle PDO_2$（具体过程略）．

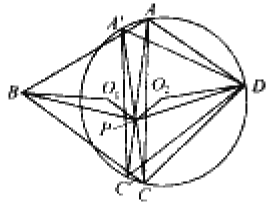


图 136

(99) 已知 X 是 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的一点，P 为 $\triangle ACX$ 的内心，Q 是 $\triangle BCX$ 的内心，M 是线段 PQ 的中点. 证明：$MC > MX$.

（2005 年第 18 届爱尔兰数学奥林匹克）

解　如图 137，由中线长公式有

$$MC^2 = \frac{1}{2}(CP^2 + CQ^2) - \frac{1}{4}PQ^2$$

$$MX^2 = \frac{1}{2}(XP^2 + XQ^2) - \frac{1}{4}PQ^2$$

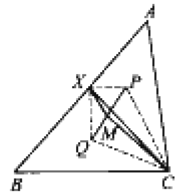


图 137

故只须证

$$CP^2 + CQ^2 > XP^2 + XQ^2$$

因为

$$\angle PXQ = \angle PXC + \angle QXC = \frac{1}{2}\angle AXC + \frac{1}{2}\angle BXC = 90^\circ$$

所以 $$XP^2 + XQ^2 = PQ^2$$

因为 $\angle PCQ = \angle PCX + \angle QCX = \frac{1}{2}\angle ACX + \frac{1}{2}\angle BCX =$

$$\frac{1}{2}\angle ACB < 90^\circ$$

所以 $$CP^2 + CQ^2 > PQ^2$$

故 $$CP^2 + CQ^2 > XP^2 + XQ^2$$

因此 $$MC > MX$$

(100) 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，P 是 $\triangle ABC$ 内部的一点，满足

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$

证明：$AP \geqslant AI$，并说明等号成立的充分必要条件是 $P = I$.

（2006 年国际数学奥林匹克）

证明　设 $\angle A = \alpha$，$\angle B = \beta$，$\angle C = \gamma$，由于

$$\angle PBA + \angle PCA + \angle PBC + \angle PCB = \beta + \gamma$$

由假设，$\angle PBC + \angle PCB = \frac{\beta + \gamma}{2}$. 由于 P，I 位于 BC 的同一边，点 B，C，I，P 四点共圆，即点 P 在 $\triangle BCI$ 的外接圆 ω 上. 记 Ω 为 $\triangle ABC$ 的外接圆，则 ω 的中心 M 为 Ω 的弧 BC 的中点，即为 $\angle A$ 的平分线 AI 与 Ω 的交点. 由于 $\triangle APM$，有

$$AP + PM \geqslant AM = AI + IM = AI + PM$$

故 $AP \geqslant AI$. 等号成立的充分必要条件是 P 位于线段 AI 上，即 $P = I$.

101 已知 $\triangle ABC$ 满足 $\angle B > \angle C$，$\angle A$ 的平分线和过顶点 A 的高线、中线与边 BC 分别交于点 L，H，D. 证明：$\angle HAL = \angle DAL$ 的充分必要条件是 $\angle BAC = 90°$.

（2004 年第 12 届土耳其国际数学奥林匹克）

解 充分性：若 $\angle BAC = 90°$，因为 AD 为中线，则

$$BD = AD = DC$$

故 $$\angle DAC = \angle ACD = \angle BAH$$

又 $\angle BAL = \angle CAL$，所以

$$\angle HAL = \angle DAL$$

必要性：如图 138，若 $\angle HAL = \angle DAL$，又 $\angle BAL = \angle LAC$，则 $\angle BAH = \angle CAD$. 作直线 CK 交 AD 的延长线于 K，且 $CK \perp AC$，则

$$\angle AKC = 90° - \angle DAC = 90° - \angle BAH = \angle ABC$$

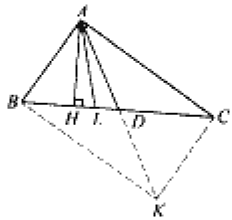


图 138

所以，A，B，K，C 四点共圆. 故 $\angle ABK = 90°$. 于是，AK 为四边形 $ABKC$ 的外接圆的直径.

易知 AD 与 BC 不垂直，又 AK 平分 BC，所以，BC 为直径.

因为 $BD = DC$. 所以，D 为圆心.

故 $DA = DB = DC$.

因此，$\triangle ABC$ 为直角三角形，$\angle BAC = 90°$.

102 已知 $\triangle ABC$，$\triangle PAB$ 和 $\triangle QAC$ 为 $\triangle ABC$ 外面的两个三角形，满足 $AP = AB$，$AQ = AC$ 以及 $\angle BAP = \angle CAQ$. 线段 BQ 与 CP 相交于点 R. 设 O 是 $\triangle BCR$ 的外接圆圆心. 证明：$AO \perp PQ$.

（2006 年中国国家集训队训练题）

证明 设圆 O 的半径为 r，则

$$PR \cdot PC = PO^2 - r^2$$

$$QR \cdot QB = QO^2 - r^2$$

所以 $$PO^2 - QO^2 = PR \cdot PC - QR \cdot QB$$

因为 $$AP = AB, AC = AQ$$

$$\angle PAC = \angle PAB + \angle BAC = \angle CAQ + \angle BAC = \angle BAQ$$

所以 $$\triangle PAC \cong \triangle BAQ, PC = BQ$$

过 A 作 $\triangle PAC$ 的高 AM 和 $\triangle BAQ$ 的高 AN. 因为 AM 和 AN，PM 和 BN，CM 和 NQ 是全等 $\triangle PAC$ 和 $\triangle BAQ$ 的对应元素，所以

$$AM = AN, PM = BN, CM = NQ$$

$$RM = \sqrt{AR^2 - AM^2} = \sqrt{AR^2 - AN^2} = RN$$

于是

$$PO^2-QO^2=PR\cdot PC-QR\cdot QB=(PR-QR)\cdot PC=$$
$$(PR-QN-NR)\cdot PC=(PR-MC-MR)\cdot PC=$$
$$(PM-MC)(PM+MC)=PM^2-MC^2=$$
$$(PA^2-AM^2)-(AC^2-AM^2)=$$
$$PA^2-AC^2=PA^2-QA^2$$

故 $AO\perp PQ$.

⑩③ 已知非等边 $\triangle ABC$，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的平分线分别交对边于点 A'，B'，C'. AA' 的中垂线与 BC 交于点 A''，BB' 的中垂线与 AC 交于点 B''，CC' 的中垂线与 AB 交于点 C''. 证明：A''，B''，C'' 三点共线.

（2004 年西班牙数学奥林匹克）

解 如图 139，注意到

$$\angle BAA'=\angle A'AC,\angle A''AA'=\angle A''A'A$$

相减得

$$\angle A''AB=\angle C$$

于是，AA'' 为 $\triangle ABC$ 外接圆的切线.

从而，$\triangle AA''B\backsim\triangle CA''A$. 故

$$\frac{BA''}{A''C}=\frac{BA''}{AA''}\cdot\frac{AA''}{A''C}=\left(\frac{AB}{AC}\right)^2$$

同理

$$\frac{CB''}{B''A}=\left(\frac{BC}{BA}\right)^2,\frac{AC''}{C''B}=\left(\frac{AC}{CB}\right)^2$$

所以

$$\frac{BA''}{A''C}\cdot\frac{CB''}{B''A}\cdot\frac{AC''}{C''B}=\left(\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{AB}\cdot\frac{AC}{CB}\right)^2=1$$

由梅涅劳斯定理的逆定理知 A''，B''，C'' 三点共线.

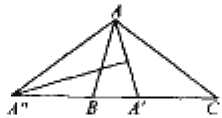


图 139

⑩④ 已知 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，过 P 作 BC，CA，AB 的垂线，其垂足分别为 D，E，F. 又 Q 是 $\triangle ABC$ 内的一点，且使得

$$\angle ACP=\angle BCQ,\angle BAQ=\angle CAP$$

证明：$\angle DEF=90^\circ$ 的充分必要条件是 Q 为 $\triangle BDF$ 的垂心.

（2004 年泰国数学奥林匹克）

证明 必要性：设 $\angle DEF=90^\circ$.

如图 140，设直线 FQ，DQ 交边 BC，AB 于 X，Y. 易知 A，E，P，F；P，D，C，E 分别四点共圆. 则

$$\angle QAC+\angle QCA=\angle FAP+\angle PCD=$$
$$\angle FEP+\angle PED=\angle FED=90^\circ$$

所以，$\angle AQC=90^\circ$，注意到

$$\triangle AFP\backsim\triangle AQC,\triangle PDC\backsim\triangle AQC$$

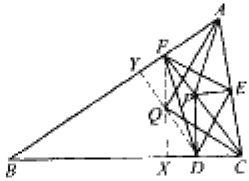


图 140

则
$$\frac{AF}{AQ}=\frac{AP}{AC},\frac{CD}{CQ}=\frac{CP}{CA}$$

因为 $\angle FAQ=\angle PAC$，$\angle ACP=\angle QCD$，则

$$\triangle AFQ\backsim\triangle APC\backsim\triangle QDC$$

所以
$$\angle FAQ=\angle DQC,\angle FQA=\angle DCQ$$

故 $\angle DYB=\angle YFQ+\angle YQF=\angle YQF+\angle FAQ+\angle FQA=$
$\angle YQF+\angle DQC+\angle FQA=$
$180°-\angle AQC=90°$

$$\angle FXB=\angle XQD+\angle QDX=\angle XQD+\angle DCQ+\angle DQC=\angle XQD+\angle FQA+\angle DQC=180°-\angle AQC=90°$$

因此，Q 是 $\triangle BDF$ 的垂心.

充分性：设 Q 是 $\triangle BDF$ 的垂心.

设直线 FQ，DQ 交边 BC，AC 于 X，Y. 易知四边形 $PFQD$ 是平行四边形.

令 $\angle BAQ=\alpha$，$\angle EDP=\angle ACP=\angle QCD=\beta$.

在 $\triangle AFQ$ 中应用正弦定理得

$$\frac{AF}{\sin(90°-B-\alpha)}=\frac{FQ}{\sin\alpha}$$

由 $AF=AP\cos(A-\alpha)$ 和正弦定理（在 $\triangle APC$ 中）得

$$\frac{AP\cos(A-\alpha)}{\cos(B+\alpha)}=\frac{FQ}{\sin\alpha}=\frac{PD}{\sin\alpha}=\frac{PC\sin(C-\beta)}{\sin\alpha}=\frac{AP\sin(C-\beta)}{\sin\beta}$$

则
$$\sin\beta\cdot\cos(A-\alpha)=\sin(C-\beta)\cdot\cos(B+\alpha)$$

由 $\beta+\angle A-\alpha=180°-(\angle C-\beta+\angle B+\alpha)$，得

$$\sin(\beta+A-\alpha)=\sin(C-\beta+B+\alpha)$$

则
$$\sin(\beta-A+\alpha)=\sin(C-\beta-B-\alpha)$$

因为 $\angle A+\angle B+\angle C=180°$，故必有

$$\beta-\angle A+\alpha=\angle C-\beta-\angle B-\alpha$$
$$\alpha+\beta=90°-\angle B$$

此时，有

$$\angle AQC=(\alpha+\angle ABQ)+(\beta+\angle CBQ)=\alpha+\beta+\angle B=90°$$

故
$$\angle DEF=\angle DEP+\angle FEP=\angle DCP+\angle FAP=\angle QCA+\angle QAC=180°-\angle AQC=90°$$

105 已知斜边为 AC 的 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$，B 在 AC 上的投影为 H. 若 AB，BC，BH 可以构成一个直角三角形，求 $\frac{AH}{HC}$ 的所有可能的值.

（2005 年第 18 届爱尔兰数学奥林匹克）

解　因为 $AB > BH$，$BC > BH$，所以，AB 或 BC 为由 AB，BC，BH 构成的直角三角形的斜边.

不妨设 $BC > AB$，如图 141 所示，于是，有

$$AB^2 + BH^2 = BC^2$$

因为

$$CH^2 + BH^2 = BC^2$$

所以

$$AB = CH$$

由 $\triangle AHB \backsim \triangle ABC$，得

$$\frac{AB}{AH} = \frac{AH + CH}{AB}$$

即

$$\frac{CH}{AH} = \frac{AH + CH}{CH}$$

设 $\frac{AH}{HC} = x$，有 $\frac{1}{x} = x + 1$. 所以，$x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

当 $AB > BC$ 时，所求的比为 $\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

综上所述，$\frac{AH}{HC}$ 的所有可能的值为 $\frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$.

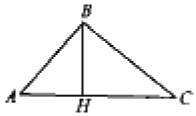


图 141

106 在方格纸上画有一个矩形，它的边与方格线交成 45° 的角，它的顶点都不在方格线上. 试问：矩形的各条边能否都刚好穿过奇数条方格线？

（2005 年第 31 届俄罗斯数学奥林匹克）

解法 1　不可能.

如图 142，假设存在矩形 $ABCD$，它的各条边都刚好穿过奇数条方格线. 不妨设 AB 是它的较短边. 选择一个直角坐标系，它的原点位于某个结点上，它的坐标轴位于方格线上，使得在矩形的各个顶点中，顶点 A 的横坐标最小，顶点 B 的纵坐标最小. 分别以 A_x，B_x，C_x，D_x 和 A_y，B_y，C_y，D_y 表示各个顶点在 x 轴与 y 轴上的投影.

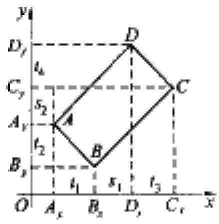


图 142

由于顶点 A，B，C，D 均不在方格线上，所以，点 A_x，B_x，C_x，D_x 的横坐标和点 A_y，B_y，C_y，D_y 的纵坐标都不是整数. 注意到 $A_xB_x = D_xC_x$ 和 $A_xD_x = AD \cdot \cos 45° \geqslant AB \cdot \cos 45° = A_xB_x$，所以，四个顶

点在 x 轴上的投影按 A_x,B_x,D_x,C_x 的顺序排列(点 B_x 与 D_x 可能重合).同理,四个顶点在 y 轴上的投影按 B_y,A_y,C_y,D_y 的顺序排列.同时,有

$$A_xB_x = D_xC_x = B_yA_y = C_yD_y = AB\cdot\cos 45^\circ$$

$$B_xD_x = A_yC_y = (AD - AB)\cos 45^\circ$$

分别用 t_1,t_2,t_3,t_4,s_1,s_2 表示线段 $A_xB_x,B_yA_y,D_xC_x,C_yD_y,B_xD_x,A_yC_y$ 上的坐标为整数的点的个数.由于在线段 A_xB_x 上恰好有 t_1 个坐标为整数的点,所以,边 AB 恰与 t_1 条纵向的方格线相交.同理,由于在线段 A_yD_y 上有 t_4+s_2 个坐标为整数的点,所以,边 AD 恰与 t_4+s_2 条横向的方格线相交.其他线段类似.

综上可知,矩形的每条边与奇数条方格线相交等价于以下各数都是奇数:

$$t_1+t_2,t_3+t_4,t_1+t_4+s_1+s_2,t_2+t_3+s_1+s_2$$

引理:如果数轴上的两条线段的长度都是 d,并且它们的端点的坐标都不是整数,那么,它们上面的整点的数目至多相差 1.

引理的证明:事实上,若线段的左端点位于非整数 a 处,右端点位于非整数 b 处,且它上面有 k 个整点 $n,n+1,\cdots,n+k-1$,则

$$n-1<a<n,n+k-1<b<n+k$$

因此 $$k-1<d=b-a<k+1$$

于是 $$d-1<k<d+1$$

从而,$k=[d]$ 或 $k=[d]+1$

引理得证.

由引理知,t_1,t_2,t_3,t_4 至多相差 1,即它们等于 t 或 $t+1$.

同理,s_1 与 s_2 等于 s 或 $s+1$.

由于 t_1+t_2 为奇数,所以,$t_1\neq t_2$.

为确定起见,设 $t_1=t,t_2=t+1$.

(1) 若 $t_3=t$,因 t_3+t_4 为奇数,知 $t_4=t+1$.则

$$s_1+s_2=(t_1+t_4+s_1+s_2)-(t_1+t_4)=$$
$$(t_1+t_4+s_1+s_2)-(2t+1)$$

为偶数.

于是,$s_1=s_2$.

这样一来,就有

$$(t_2+s_2+t_4)-(t_1+s_1+t_3)=2$$

与引理中关于线段 A_xC_x 和 D_yB_y 上的整点个数至多相差 1 的断言矛盾.

(2) 若 $t_3=t+1$,则 $t_4=t$.此时

$$s_1+s_2=(t_1+t_4+s_1+s_2)-(t_1+t_4)$$

为奇数.于是

$$s_1 = s, s_2 = s + 1$$

或

$$s_1 = s + 1, s_2 = s$$

但是,第一种情况与引理关于线段 A_xD_x 和 B_yC_y 的断言矛盾;后一种情况与引理关于线段 A_yD_y 和 B_xC_x 的断言矛盾.

解法 2　假设存在满足条件的矩形 $ABCD$.

设 $AB \geq \sqrt{2}$.分别在边 AB 和 CD 上截取 $BB' = CC' = \sqrt{2}$.于是,线段 BB' 和 CC' 都恰好分别与一条纵向的方格线相交,也都恰好分别与一条横向的方格线相交,且 $B'C'$ 可由线段 BC 平移具有整坐标的向量 $\overrightarrow{BB'}$ 来得到.因此,矩形 $AB'C'D$ 仍然满足条件.

继续进行这样的操作,最终,可得到一个满足条件的矩形,其各边长都小于$\sqrt{2}$(仍记作 $ABCD$).

此时,矩形的每条边都恰好与一条方格线相交,即或者与一条纵向方格线相交,或者与一条横向方格线相交.

设矩形的最靠左的顶点为 A,最靠下的顶点为 B,最右的顶点为 C,最上的顶点为 D.若线段 AB 与 BC 都与纵向方格线相交,则折线 CDA 也与这些方格线相交,且它们都不与横向方格线相交.此时,矩形 $ABCD$ 在水平方向的投影长度就大于 1(在 A 与 C 之间至少有两条纵向方格线),而在竖直方向的投影长度却小于 1,这是不可能的.

若 AB 与 BC 都与(同一条)横向方格线相交,则矩形 $ABCD$ 被夹在两条相邻的纵向方格线之间.此时,AD 和 DC 也都与横向方格线相交,根据同样的理由,这也是不可能的.

现只剩下一种情况(或其对称情况),即 AB 与 CD 都与同一条纵向方格线 v 相交,而 BC 与 AD 都与同一条横向方格线 h 相交.此时,点 A 与点 B 位于 h 的下方,点 C 位于 h 的上方,因此,$BC > AB$.同理,点 B 与点 C 位于 v 的右侧,点 D 位于 v 的左侧.从而,$BC < CD$.于是,$AB < BC < CD$,这是不可能的.

(107) 一个三角形的三个内角的余弦分别等于另一个三角形的三个内角的正弦.试求这六个内角的最大值.

(2005 年第 31 届俄罗斯数学奥林匹克)

解　$\frac{3\pi}{4}$.

将第一个三角形的三个内角分别记为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$,将第二个三角形的三个内角分别记为 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

由于 $\cos\alpha_j=\sin\beta_j>0$，所以，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 均为锐角，且 $\beta_j=\frac{\pi}{2}\pm\alpha_j$，$j=1,2,3$. 从而，有

$$\pi=\beta_1+\beta_2+\beta_3=\frac{3\pi}{2}+(\pm\alpha_1\pm\alpha_2\pm\alpha_3)$$

由于 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\pi$，所以，上式右端的括号中既有加号，也有减号.

又由于第二个三角形中不可能有两个钝角，所以，括号中必有一个加号，两个减号. 从而，该式即为

$$\pi=\frac{3\pi}{2}+(\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3)$$

结合 $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\pi$，立得 $\alpha_1=\frac{\pi}{4}$，$\beta_1=\frac{3\pi}{4}$.

由于第二个三角形中只能有一个钝角，第一个三角形又都是锐角，故六个内角中的最大值是 $\frac{3\pi}{4}$.

108 将梯形的各个顶点均作关于不包含该顶点的对角线的对称点. 证明：如果所得到的四个像点也形成四边形，则必为一个梯形.

（2005 年第 31 届俄罗斯数学奥林匹克）

证明 如图 143，将原来的梯形记为 $ABCD$，其下底为 AD，上底为 BC，将两条对角线的交点记为 O，并将所得的四个像点分别记为 A',B',C',D'.

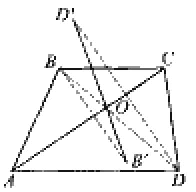


图 143

于是，线段 BD 与 $B'D'$ 关于 AC 对称. 故知它们相等，且相交于直线 AC 之上，即相交于点 O.

因此，$\frac{BO}{OD}=\frac{B'O}{OD'}$.

同时，线段 $A'C'$ 经过点 O，且

$$\frac{CO}{OA}=\frac{C'O}{OA'}$$

又由于 $\triangle AOD\backsim\triangle COB$，所以

$$\frac{BO}{OD}=\frac{CO}{OA}$$

从而
$$\frac{B'O}{OD'}=\frac{C'O}{OA'}$$

故 $\triangle A'OD'\backsim\triangle C'OB'$，这就表明 $B'C'\parallel A'D'$.

⑩⑨ 设凸四边形的面积为 S. 对它的每个顶点,都作其关于不经过它的对角线的对称点. 将所得到的四个像点组成的四边形的面积记作 S'. 证明:$\frac{S'}{S}<3$.

(2005 年第 31 届俄罗斯数学奥林匹克)

证明 在所作的变换下,四边形的对角线的长度保持不变,对角线的交点保持不变. 将原四边形两条对角线间所夹的锐角记作 α. 在变换之后,对角线间的夹角之一变为 3α 或 $3\alpha-\pi$. 因此

$$\frac{S'}{S}=\left|\frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}\right|=|3-4\sin^2\alpha|<3$$

⑪⓪ 已知梯形 $ABCD$ 满足 $AB\,/\!/\,CD$,E 为边 AB 上一点,且满足 $EC\,/\!/\,AD$. 直线 AC,BD,DE 交出的三角形的面积记为 t,梯形 $ABCD$ 的面积记为 T. 当 $\frac{t}{T}$ 取最大值时,求 $\frac{AB}{CD}$ 的值.

(2004 ~ 2005 年匈牙利数学奥林匹克)

解 如图 144,由题意知四边形 $AECD$ 为平行四边形. 故 AC,DE 的交点 F 平分 DE.

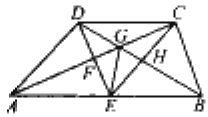


图 144

设 $\frac{EB}{AE}=x$,则

$$DG:GB=1:(1+x)$$

因为 $t=S_{\triangle DGF}$,所以

$$S_{\triangle DEB}=2t(2+x),S_{\triangle ADE}=2t\cdot\frac{2+x}{x}$$

则
$$T=S_{\triangle DBC}+S_{\triangle ADE}+S_{\triangle DEB}=2S_{\triangle ADE}+S_{\triangle DEB}=4t\cdot\frac{2+x}{x}+2t(2+x)$$

故
$$\frac{T}{t}=4\times\frac{2+x}{x}+2(2+x)=2(4+\frac{4}{x}+x)$$

当 $x=2$ 时,$\frac{T}{t}$ 取最小值.

因此,$\frac{AB}{CD}=\frac{1+x}{1}=3$.

⑪① 已知锐角 $\triangle ABC$,求 $\triangle ABC$ 内的点 M 的轨迹,使得

$$AB-FG=\frac{MF\cdot AG+MG\cdot BF}{CM}$$

其中 F,G 分别是点 M 在边 BC,AC 上的投影.

(2005 年保加利亚国际数学奥林匹克选拔赛试题)

解 设点 A,B 在直线 FG 上的投影分别为 P,Q，则

$$AB \geqslant PQ = PG + GF + FQ$$

又因为 C,F,M,G 四点共圆，所以

$$\angle CMF = \angle CGF = \angle AGP$$

从而，有 $\triangle APG \backsim \triangle CFM$.

于是，$\frac{PG}{AG} = \frac{MF}{CM}$，即 $PG = \frac{MF \cdot AG}{CM}$

同理 $QF = \frac{MG \cdot BF}{CM}$.

进而可得

$$AB - FG \geqslant PG + FQ = \frac{MF \cdot AG + MG \cdot BF}{CM}$$

当且仅当 $AB \parallel FG$，即 $\angle BAC = \angle FGC = \angle AGP$ 时，等号成立.

于是，$\angle MCB = 90° - \angle BAC = \angle OCB$，其中 O 为 $\triangle ABC$ 的外心.

设 CO 与 AB 交于点 D，则点 M 的轨迹为线段 CD（不包含点 C，D）.

经验证，线段 CD 内的点满足条件.

(112) 以点 C 为旋转中心，将 $\triangle ABC$ 旋转为 $\triangle A'B'C'$，设线段 BA'，AC，$B'C$ 的中点分别为 M,E,F. 若 $AC \neq BC$，且 $EM = FM$，求 $\angle EMF$ 的度数.

（2005 年保加利亚国家数学奥林匹克）

解 如图 145，联结 AA'，BB'. 设

$$BC = B'C = a$$
$$AC = A'C = b$$
$$AB = A'B' = c$$
$$\angle ACB = \gamma$$

因为 $\triangle AA'C \backsim \triangle BB'C$，所以

$$AA' : AC = BB' : BC = k$$

故
$$AA' = kb, BB' = ka$$

在广义四边形 $ABCA'$ 和 $A'B'BC$ 中分别应用欧拉定理，可得

$$4EM^2 = k^2b^2 + c^2 + b^2 + a^2 - A'B^2 - b^2$$
$$4FM^2 = k^2a^2 + c^2 + b^2 + a^2 - A'B^2 - a^2$$

由于 $EM = FM$，所以，有

$$(k^2 - 1)(a^2 - b^2) = 0$$

又因为 $a \neq b$，于是，有 $k = 1$.

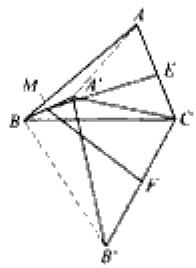


图 145

所以，$\triangle AA'C$ 是正三角形，即旋转角为 $\pm 60°$.

下面只考虑旋转角为 $60°$（逆时针方向）的情形，另一种情形类似.

在 $\triangle A'BC$ 中，由余弦定理得

$$A'B^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(60° - \gamma)$$

在 $\triangle AB'C$ 中，可得

$$4EF^2 = B'A^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(60° + \gamma)$$

又因

$$4EM^2 = c^2 + b^2 + a^2 - A'B^2 = c^2 + 2ab\cos(60° - \gamma) =$$
$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma + 2ab\cos(60° - \gamma) =$$
$$a^2 + b^2 - 2ab\cos(60° + \gamma) = 4EF^2$$

所以，$\triangle EFM$ 是正三角形.

从而，有 $\angle EMF = 60°$.

⑪③ 设 $\triangle ABC$ 的边 AB 的中点为 N，$\angle A > \angle B$，D 是射线 AC 上一点，满足 $CD = BC$，P 是射线 DN 上一点，且与点 A 在边 BC 的同侧，满足 $\angle PBC = \angle A$，PC 与 AB 交于点 E，BC 与 DP 交于点 T. 求表达式 $\dfrac{BC}{TC} - \dfrac{EA}{EB}$ 的值.

（2005 年土耳其国际数学奥林匹克代表队选拔赛试题）

解　如图 146，延长 BP 交直线 AC 于 F. 于是，

$$\triangle ACB \backsim \triangle BCF$$

从而
$$AC \cdot CF = BC^2$$

故
$$CF = \frac{BC^2}{AC}$$

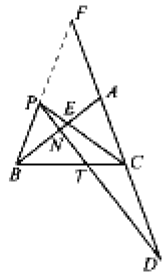


图 146

注意到直线 DTN 截 $\triangle ABC$，应用梅涅劳斯定理得

$$\frac{AN}{NB} \cdot \frac{BT}{TC} \cdot \frac{CD}{DA} = 1$$

则
$$\frac{BT}{TC} = \frac{DA}{CD} \cdot \frac{BN}{AN} = \frac{DA}{CD} = \frac{AC}{BC} + 1$$

故
$$\frac{BC}{TC} = \frac{BT}{TC} + 1 = \frac{AC}{BC} + 2$$

同理，由直线 DNP 截 $\triangle ABF$，得

$$\frac{FP}{PB} \cdot \frac{BN}{NA} \cdot \frac{AD}{DF} = 1$$

由直线 CEP 截 $\triangle ABF$，得

$$\frac{FP}{PB} \cdot \frac{BE}{EA} \cdot \frac{AC}{CF} = 1$$

故
$$\frac{EA}{BE} = \frac{FP}{PB} \cdot \frac{AC}{CF} = \frac{AN}{BN} \cdot \frac{FD}{AD} \cdot \frac{AC}{CF} = \frac{FD}{AD} \cdot \frac{AC}{CF} =$$

$$\frac{\frac{BC^2}{AC}+BC}{AC+BC}\cdot\frac{AC}{\frac{BC^2}{AC}}=\frac{BC}{AC}\cdot\frac{AC^2}{BC^2}=\frac{AC}{BC}$$

因此
$$\frac{BC}{TC}-\frac{EA}{BE}=2$$

(114) 已知凸四边形 $ABCD$，$AD\cap BC=\{E\}$，$AC\cap BD=\{I\}$．证明：当且仅当 $AB\parallel CD$，且 $IC^2=IA\cdot AC$ 时，$\triangle EDC$ 重心与 $\triangle IAB$ 的重心重合．

（2005 年罗马尼亚数学奥林匹克）

证明 由 $I=AC\cap BD$，存在 $m,n>0$，使得

$$\overrightarrow{IC}+m\overrightarrow{IA}=0,\overrightarrow{ID}+n\overrightarrow{IB}=0$$

因为 $AD\cap BC=\{E\}$，则可找到 $a,b\in\mathbf{R}$，使得

$$\overrightarrow{IE}=a\overrightarrow{IC}+(1-a)\overrightarrow{IB}=b\overrightarrow{ID}+(1-b)\overrightarrow{IA}$$

故
$$\overrightarrow{IE}=-am\overrightarrow{IA}+(1-a)\overrightarrow{IB}=-bn\overrightarrow{IB}+(1-b)\overrightarrow{IA}$$

从而

$$-am=1-b,1-a=-bn \quad ①$$

当且仅当 $\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IB}$，即

$$\overrightarrow{IE}=(1+m)\overrightarrow{IA}+(1+n)\overrightarrow{IB}$$

时，$\triangle EDC$ 与 $\triangle IAB$ 的重心重合．

于是，有

$$-am=1+m,1-a=1+n \quad ②$$

由式 ① 与式 ② 联立得

$$m=n,m^2=m+1$$

从而，$\frac{IC}{IA}=\frac{ID}{IB}$，$\left(\frac{IC}{IA}\right)^2=\frac{IC}{IA}+1$，等价于 $AB\parallel CD$，且 $IC^2=IA\cdot AC$．

(115) 设 $\triangle ABC$ 为非直角三角形，其垂心为 H，M_1，M_2，M_3 分别为边 BC，CA，AB 的中点．令 A_1，B_1，C_1 分别为 H 关于 M_1，M_2，M_3 的对称点，A_2，B_2，C_2 分别为 $\triangle BA_1C$，$\triangle CB_1A$，$\triangle AC_1B$ 的垂心．求证：

（1）$\triangle ABC$ 与 $\triangle A_2B_2C_2$ 的重心重合；

（2）由 $\triangle AA_1A_2$，$\triangle BB_1B_2$，$\triangle CC_1C_2$ 的重心所构成的三角形与 $\triangle ABC$ 相似．

（2005 年罗马尼亚数学奥林匹克）

证明 如图 147，因为 $\triangle BHC$ 与 $\triangle CA_1B$ 关于 M_1 对称，且 A

为 $\triangle BHC$ 的垂心，所以，A_2 为 A 关于 M_1 的对称点.

(1) 对任意一点 P 有

$$\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=2\overrightarrow{PM_1}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PA_2}$$

将类似的关系式相加得

$$\sum\overrightarrow{PA_2}=\sum\overrightarrow{PA}=3\overrightarrow{PG}$$

由此可推知所证结论成立.

(2) 设 G_A,G_B,G_C 分别为 $\triangle AA_1A_2,\triangle BB_1B_2,\triangle CC_1C_2$ 的重心. 因此

$$\overrightarrow{HG_A}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HA_1}+\overrightarrow{HA_2})=$$

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{HM_1}+\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{AM_1})=\frac{4}{3}\overrightarrow{HM_1}$$

即
$$\overrightarrow{G_AG_B}=\frac{4}{3}(\overrightarrow{HM_2}-\overrightarrow{HM_1})=\frac{4}{3}\overrightarrow{M_1M_2}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$$

由此可知，由 $\triangle AA_1A_2,\triangle BB_1B_2,\triangle CC_1C_2$ 的重心所构成的三角形与 $\triangle ABC$ 相似，且相似比为 $\frac{2}{3}$.

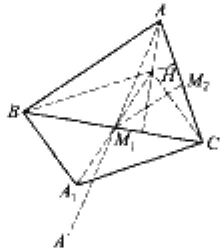


图 147

116 已知锐角 $\triangle ABC$，对其内部或边界的任意点 T 而言，T_a，T_b，T_c 是由点 T 分到边 BC,CA,AB 所作垂线的垂足. 若

$$f(T)=\frac{AT_c+BT_a+CT_b}{TT_a+TT_b+TT_c}$$

证明：当且仅当 $\triangle ABC$ 为等边三角形时，$f(T)$ 不依赖于点 T 的选择.

(2005 年克罗地亚数学竞赛)

证明　设 $\triangle ABC$ 是等边三角形，证明 $f(T)$ 不依赖于点 T 的选择，即 f 为常数.

如图 148，点 T 为以 a 为边长的等边三角形内任一点，过点 T 作

$$A_1B_2 /\!/ AB$$
$$B_1C_2 /\!/ BC$$
$$C_1A_2 /\!/ CA$$

分别交 BC,CA,AB 于 A_1,A_2,B_1,B_2,C_1,C_2.

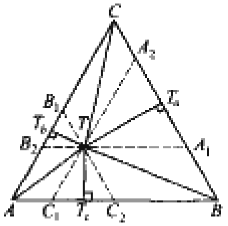


图 148

易知 $\triangle TA_1A_2,\triangle TB_1B_2,\triangle TC_1C_2$ 均为等边三角形，它们的高分别为 TT_a,TT_b,TT_c. 则

$$TT_a+TT_b+TT_c=\frac{\sqrt{3}}{2}A_1A_2+\frac{\sqrt{3}}{2}TB_1+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2T=$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(A_1A_2+TB_1+C_2T)=\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$AT_c + BT_a + CT_b = (AC_1 + C_1T_c) + (BA_1 + A_1T_a) + (CB_1 + B_1T_b) = (TB_1 + \frac{1}{2}C_2T) + (BA_1 + \frac{1}{2}A_1A_2) + (A_2T + \frac{1}{2}TB_1) = \frac{3}{2}(BA_1 + A_1A_2 + A_2C) = \frac{3}{2}a$$

因此,对等边 $\triangle ABC$ 内任意一点 T,有

$$f(T) = \frac{AT_c + BT_a + CT_b}{TT_a + TT_b + TT_c} = \frac{\frac{3}{2}a}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \sqrt{3}$$

故 $f(T)$ 不依赖于点 T 的选择.

下面证明逆命题.

设 $f(T)$ 不依赖于点 T 的选择,证明 $\triangle ABC$ 是等边三角形.

为此,需求出以 $f(A),f(B),f(C)$ 的值.

由假设 $f(T)$ 不依赖于点 T 的选择,即

$$f(A) = f(B) = f(C)$$

如图 149,考虑 $T = A$,T_b,T_c 与点 A 重合,T_a 为过顶点 A 的高线的垂足.记 $\triangle ABC$ 的顶点 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,其对应的角为 α,β,γ.则

$$TT_b = TT_c = 0, TT_a = c\sin\beta, AT_c = 0$$

$$BT_a = c\cos\beta, CT_b = b$$

因此
$$f(A) = \frac{c\cos\beta + b}{c\sin\beta}$$

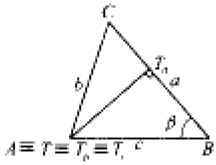


图 149

下面用两种方法继续证明.

证法 1 由余弦定理

$$f(A) = \frac{2ac\cos\beta + 2ab}{2ac\sin\beta} = \frac{2ab + a^2 + c^2 - b^2}{4S} = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2b(a-b)}{4S}$$

其中 S 为 $\triangle ABC$ 的面积.

同理,对另外两个顶点,有

$$f(B) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2c(b-c)}{4S}$$

$$f(C) = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2c(c-a)}{4S}$$

因为 $f(T)$ 不依赖于点 T 的选择,所以,以上三个表达式必相等.于是,有

$$b(a-b) = c(b-c) = a(c-a) = x \qquad ①$$

因为 a,b,c 是非零的,则

$$a-b=\frac{x}{b},b-c=\frac{x}{c},c-a=\frac{x}{a}$$

以上三式相加得

$$0=x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

而上式括号内的表达式非零,因此,$x=0$.

再由式 ① 得 $a=b=c$.

故 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

证法 2 已求得 $f(A)=\dfrac{c\cos\beta+b}{c\sin\beta}$.

同理可得

$$f(B)=\frac{a\cos\gamma+c}{a\sin\gamma},f(C)=\frac{b\cos\alpha+a}{b\sin\alpha}$$

因为 $f(T)$ 不依赖于点 T 的选择,所以,以上三个表达式必相等.故

$$\frac{c\cos\beta+b}{c\sin\beta}=\frac{a\cos\gamma+c}{a\sin\gamma}=\frac{b\cos\alpha+a}{b\sin\alpha}$$

由 $\dfrac{c\cos\beta+b}{c\sin\beta}=\dfrac{b\cos\alpha+a}{b\sin\alpha}$,得

$$bc\cos\beta\cdot\sin\alpha+b^2\sin\alpha=bc\cos\alpha\cdot\sin\beta+ac\sin\beta$$

则 $$bc\sin(\alpha-\beta)+b^2\sin\alpha=ac\sin\beta=2S=bc\sin\alpha$$

从而 $$bc\sin(\alpha-\beta)=bc\sin\alpha-b^2\sin\alpha$$

即 $$c\sin(\alpha-\beta)=(c-b)\sin\alpha$$

再由正弦定理得

$$\sin\gamma\cdot\sin(\alpha-\beta)=(\sin\gamma-\sin\beta)\sin\alpha \qquad ②$$

类似地,可得

$$\sin\alpha\cdot\sin(\beta-\gamma)=(\sin\alpha-\sin\gamma)\sin\beta$$

$$\sin\beta\cdot\sin(\gamma-\alpha)=(\sin\beta-\sin\alpha)\sin\gamma$$

以上三式相乘,且左右两边同除以

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma(\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\neq 0)$$

得 $$\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\beta-\gamma)\cdot\sin(\gamma-\alpha)=$$
$$(\sin\gamma-\sin\beta)(\sin\alpha-\sin\gamma)(\sin\beta-\sin\alpha)$$

注意到

$$\sin(x-y)=2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cdot\cos\frac{x+y}{2}$$

于是,有

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}=$$
$$\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\alpha}{2}$$

故

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\cdot\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}+\cos\frac{\gamma+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\beta+\alpha}{2}\right)=0$$

由于 α,β,γ 为锐角，则括号内的表达式为正数. 所以

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}=0$$

设 $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0$，则 $\alpha=\beta$.

又由式②得 $\sin\beta=\sin\gamma$.

因为 β,γ 为锐角，故 $\beta=\gamma$.

因此，$\alpha=\beta=\gamma$，即 $\triangle ABC$ 为等边三角形.

(117) 设 S 为锐角 $\triangle ABC$ 的边 AB 上的点，P,Q 分别为 $\triangle ASC$ 和 $\triangle BSC$ 的外接圆的圆心. 问：点 S 在边 AB 上的什么位置时，使得 $\triangle PQS$ 的面积最小?

（2005 年克罗地亚数学竞赛）

解法 1 如图150，设 $\angle ASC=\omega$.

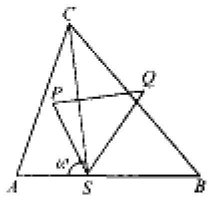


图 150

因为 SP,SQ 分别是 $\triangle SAC,\triangle SBC$ 的外接圆半径，由正弦定理得

$$SP=\frac{AC}{2\sin\omega},SQ=\frac{BC}{2\sin\omega}$$

由圆心角和圆周角定理得

$$\angle PSQ=\angle PSC+\angle QSC=\left(90^\circ-\frac{1}{2}\angle SPC\right)+\left(90^\circ-\frac{1}{2}\angle SQC\right)=(90^\circ-\angle A)+(90^\circ-\angle B)=180^\circ-\angle A-\angle B=\angle ACB$$

则

$$S_{\triangle PQS}=\frac{1}{2}\cdot SP\cdot SQ\sin\angle PSQ=\frac{AC\cdot BC\sin C}{8\sin^2\omega}=\frac{S_{\triangle ABC}}{4\sin^2\omega}$$

当 $\sin^2\omega=1$，即 $\omega=90^\circ$ 时，取得最小值.

因此，点 S 为过点 C 的高线的垂足.

解法 2 如图151，过圆心 P 和 Q 的一条直线垂直于公共弦 CS，且过其中点 S_0，从而

$$S_{\triangle PQS}=\frac{1}{2}PQ\cdot SS_0$$

设 P_0,Q_0 分别为点 P,Q 到 AB 的垂线的垂足.

因为 AS 是以 P 为圆心的圆的弦，所以，点 P_0 为 AS 的中点.

同理，点 Q_0 为 BS 的中点.

因此

$$S_{\triangle PQS}=\frac{1}{2}PQ\cdot SS_0\geqslant\frac{1}{2}P_0Q_0\cdot SS_0=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}AB\cdot\frac{1}{2}CS\geqslant\frac{1}{8}AB\cdot CC_0=\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$$

其中 C_0 为过点 C 的高线的垂足.

当且仅当 $PQ\parallel AB$ 且 $CS\perp AB$ 时，等号成立.

但这两个条件是等价的，因此，点 S 为过点 C 的垂线的垂足.

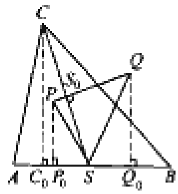


图 151

解法 3 由圆周角定理得

$$\angle SPQ=\frac{1}{2}\angle SPC=\angle SAC=\angle BAC$$

类似地，有 $\angle SQP=\angle ABC$.

因此，$\triangle PQS\backsim\triangle ABC$.

若 $k=\frac{PS}{AC}$ 为相似比，则

$$S_{\triangle PQS}=k^2S_{\triangle ABC}$$

因为 AC 是 PS 为半径的圆的弦，则 $AC\leqslant 2PS$.

故 $k\geqslant\frac{1}{2}$.

当且仅当 AC 为圆 P 的直径，即 $CS\perp AB$ 时，等号成立. 因此，点 S 为过点 C 的高线的垂足时，$\triangle PQS$ 的面积最小.

⑪⑧ 已知 $\triangle ABC$ 的内切圆的半径为 r，圆心为 O，过点 O 的直线分别交边 BC,CA 于点 D,E. 记 $\triangle CDE$ 的面积为 S. 求证：$S\geqslant 2r^2$，并指出等号成立的条件.

（2005 年克罗地亚数学竞赛）

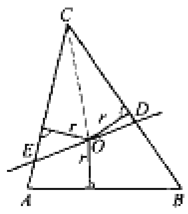


图 152

解 如图 152，$\triangle CED$ 的面积 S 满足

$$S=S_{\triangle CEO}+S_{\triangle COD}=\frac{1}{2}|CE|\cdot r+\frac{1}{2}|CD|\cdot r=\frac{|CE|+|CD|}{2}\cdot r$$

由算术 - 几何平均值不等式得

$$\frac{|CE|+|CD|}{2} \geqslant \sqrt{|CE|\cdot|CD|}$$

从而，$S \geqslant \sqrt{|CE|\cdot|CD|}\cdot r$.

由于三角形两条边长的乘积不小于三角形面积的2倍，所以

$$|CE|\cdot|CD| \geqslant 2S$$

仅当 $\angle C = 90°$ 时，等号成立.

因此，$S \geqslant \sqrt{|CE|\cdot|CD|}\cdot r \geqslant \sqrt{2S}r$，即 $S^2 \geqslant 2Sr^2$.

所以，$S \geqslant 2r^2$.

当且仅当 $CE = CD$，$\angle C = 90°$ 时，上式等号成立.

> ⑪⑨ 已知 E，F 分别是平行四边形 $ABCD$ 的边 AB，AD 上的点，且满足 $EF \parallel BD$.证明：$\triangle BCE$ 和 $\triangle CDF$ 的面积相等.
>
> （2005年克罗地亚数学竞赛）

证法1 如图153，因为 $\triangle CDF$ 和 $\triangle BDF$ 有公共的底边 DF，且边 DF 上的高相等（$DF \parallel BC$），所以

$$S_{\triangle CDF} = S_{\triangle BDF}$$

又因为 $\triangle BDF$ 和 $\triangle BDE$ 有公共的底边 BD，且边 BD 上的高相等（$BD \parallel EF$），所以

$$S_{\triangle BDF} = S_{\triangle BDE}$$

同理

$$S_{\triangle BDE} = S_{\triangle BCE}$$

综上，得 $S_{\triangle BCE} = S_{\triangle CDF}$.

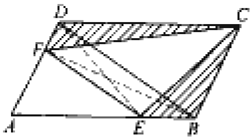


图153

证法2 如图154，分别过点 E，F 作 AC 的垂线，垂足为 M，N，设 AC 与 EF 的交点为 P.因为点 P 是 EF 的中点，所以

$$\triangle EMP \cong \triangle FNP$$

故

$$EM = FN$$

又 $\triangle AEC$ 和 $\triangle ACF$ 有公共底边 AC，且 $EM = FN$，所以

$$S_{\triangle AEC} = S_{\triangle ACF}$$

注意到 $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD}$，故 $S_{\triangle BCE} = S_{\triangle CDF}$.

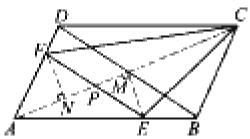


图154

> ⑫⑳ 求满足下列条件的最小实数 t：存在两个边长都是整数的三角形，这两个三角形不全等，而且这两个三角形的面积都是 t.
>
> （2005年新西兰数学奥林匹克）

解 设

$$s(a,b,c) = (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

由海伦公式知，边长分别是 a,b,c 的三角形的面积是 $\frac{1}{4}\sqrt{s(a,b,c)}$.

不失一般性，假设 $a \geqslant b \geqslant c$. 设 $b = c + x, a = b + y = c + x + y$，其中 $x, y \geqslant 0$. 则

$$s(a,b,c) = (a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) = (3c+2x+y)(c-y)(c+y)(c+2x+y)$$

由三角形三边的关系，可以得到 $y < c$.

另一方面，如果非负三元整数组 (c,x,y) 满足 $y < c$，那么，由 $c+x+y, c+x, c$ 能够构成三角形三条边.

注意到，$s(c+x+y, c+x, c)$ 随着 x 的增加而增加. 对 c 所有可能出现的情况进行讨论.

(1) 如果 $c = 1$，得到 $y = 0$，当 x 分别取 0,1,2,3 时，$s(c+x+y, c+x, c)$ 分别等于 3,15,35,63.

(2) 如果 $c = 2$，得到 $y = 0$ 或 $y = 1$.

当 $y = 0$，x 分别取 0,1 时，$s(c+x+y, c+x, c)$ 分别等于 48, 128.

当 $y = 1$ 时，x 取 0 时，$s(c+x+y, c+x, c)$ 等于 63.

(3) 当 $c \geqslant 3$ 时

$$s(c+x+y, c+x, c) \geqslant 3c \times 1 \times c \times c = 3c^3 \geqslant 81 > 63$$

所以，当 $s(c+x+y, c+x, c)$ 比 63 小时，不存在两个满足条件的三角形.

又

$$s(4,4,1) = s(3,2,2) = 63$$

故相对应的两个三角形的面积都是

$$t = \frac{\sqrt{63}}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{4}$$

> ⑫1 在凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle ADC = \angle BCD > 90°$，$BE$ 平行于 AD 交 AC 延长线于点 E，AF 平行于 BC 交 BD 延长线于点 F，联结 E, F. 证明：$EF \parallel CD$.
>
> (2005 年新西兰数学奥林匹克)

证明　如图 155，设 P 是 AC 和 BD 的交点.

因为 $BC \parallel AF$，所以，$\triangle PBC \backsim \triangle PFA$. 故

$$\frac{PF}{PB} = \frac{PA}{PC}$$

即 $$PF=\frac{PA\cdot PB}{PC}$$

同理 $$PE=\frac{PA\cdot PB}{PD}$$

故 $$\frac{PE}{PF}=\frac{\frac{PA\cdot PB}{PD}}{\frac{PA\cdot PB}{PC}}=\frac{PC}{PD}$$

因此 $$EF\ /\!/\ CD$$

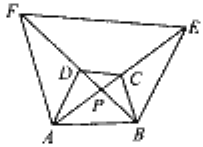


图 155

⑫② 已知凸四边形 $ABCD$，P，Q 分别为边 BC，CD 上的点，且使得 $\angle BAP=\angle DAQ$。求证：当且仅当过 $\triangle ABP$ 与 $\triangle ADQ$ 垂心的直线垂直于 AC 时，$\triangle ABP$ 与 $\triangle ADQ$ 的面积相等.

（2005 年克罗地亚数学奥林匹克）

证明 如图 156，记 H_1，H_2 分别为 $\triangle ABP$，$\triangle ADQ$ 的垂心，H'_1，H'_2 分别为 H_1，H_2 在边 AC 上的正交投影. 设 H'_1，H'_2 与 C 一样位于点 A 的同一侧.

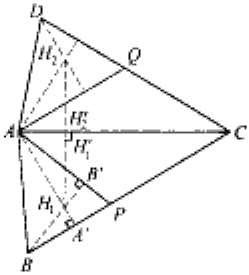


图 156

当且仅当 $H'_1=H'_2$ 时，H_1H_2 与 AC 垂直，即当且仅当 $AH'_1=AH'_2$ 时，$H_1H_2\perp AC$.

过点 A，B 作 $\triangle ABP$ 的高线，垂足分别为 A'，B'.

因为

$$\angle CH'_1H_1=90^\circ,\angle DA'H_1=90^\circ$$

$$\angle PA'H_1=90^\circ,\angle PB'H_1=90^\circ$$

所以，C，H'_1，H_1，A'；P、B'，H_1，A' 分别四点共圆，于是

$$AH'_1\cdot AC=AH_1\cdot AA'=AB'\cdot AP$$

又 $\angle BAP=\angle DAQ=\alpha$，则

$AB'\cdot AP=AB\cos\alpha\cdot AP=$

$$\frac{1}{2}AB\cdot AP\sin\alpha\cdot 2\cot\alpha=2S_{\triangle ABP}\cot\alpha$$

故 $$AH'_1=\frac{2S_{\triangle ABP}\cot\alpha}{AC}$$

同理 $$AH'_2=\frac{2S_{\triangle ADQ}\cot\alpha}{AC}$$

因此，当且仅当 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle ADQ}$ 时，$AH'_1=AH'_2$.

⑫③ 已知 U 为 $\triangle ABC$ 的内切圆的圆心，O_1,O_2,O_3 分别为 $\triangle BCU$，$\triangle CAU$，$\triangle ABU$ 的外接圆的圆心. 求证：$\triangle ABC$ 的外接圆圆心与 $\triangle O_1O_2O_3$ 的外接圆圆心重合.

（2005 年克罗地亚数学奥林匹克）

证明　如图 157，分别过 $\triangle ABC$ 的顶点 A,B,C 及其内切圆圆心 U 的直线分别为角 α,β,γ 的平分线，其中 $\angle CAB=\alpha$，$\angle ABC=\beta$，$\angle BCA=\gamma$. 设 O 为 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心.

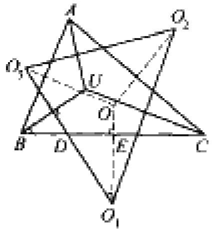


图 157

因为三角形外接圆圆心位于每条边的垂直平分线上，点 O 和 O_1 位于边 BC 的垂直平分线上，所以，OO_1 为边 BC 的垂直平分线.

类似地，OO_3，O_1O_3 分别为边 AB，UB 的垂直平分线.

因为 $\angle UBC$ 与 $\angle O_3O_1O$ 的边互相垂直，所以

$$\angle UBC=\angle O_3O_1O,\angle O_3O_1O=\frac{\beta}{2}$$

同理
$$\angle OO_3O_1=\frac{\beta}{2}$$

故
$$\angle O_3O_1O=\angle OO_3O_1$$

因此，$\triangle O_1OO_3$ 为等腰三角形，即 $OO_1=OO_3$.

同理可得 $OO_1=OO_2$.

故 $OO_1=OO_2=OO_3$.

所以，O 为 $\triangle O_1O_2O_3$ 的外接圆的圆心.

⑫④ 联结三角形内切圆的圆心和它的顶点的直线将原三角形分为三个三角形. 若它们之中的一个三角形与原三角形相似，求三角形三个角的度数.

（2005 年克罗地亚数学奥林匹克）

解　如图 158，设 $\triangle ABC$ 的三个内角分别为 α,β,γ，O 为其内切圆圆心. 点 O 和 $\triangle ABC$ 的三个顶点的连线是其三个内角的平分线. 因为

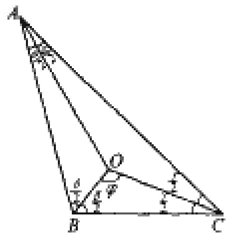


图 158

$$\angle OBC=\frac{\beta}{2},\angle OCB=\frac{\gamma}{2}$$

则
$$\angle COB=180^\circ-\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}=90^\circ+\frac{\alpha}{2}$$

不失一般性，设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle COB$ 相似. 于是，$\angle COB$ 等于 α，β,γ 中的一个.

若 $\angle COB=\alpha$，则 $90^\circ+\frac{\alpha}{2}=\alpha$，即 $\alpha=180^\circ$，这是不可能的. 因此，$\angle COB=\beta$ 或 $\angle COB=\gamma$.

不妨设 $\angle COB=\beta$，则有 $\angle OBC=\alpha$ 或 $\angle OBC=\gamma$.

若是第一种情况，有 $\angle BCO=\gamma$，则 $\frac{\gamma}{2}=\gamma$，不可能. 因此

$$\angle OBC=\gamma,\angle BCO=\alpha$$

于是 $$\gamma=2\alpha,\beta=2\gamma=4\alpha$$

因为 $$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$$

即 $$\alpha+2\alpha+4\alpha=180^\circ$$

则 $$\alpha=\frac{\pi}{7},\beta=\frac{4\pi}{7},\gamma=\frac{2\pi}{7}.$$

125 给定一个凸四边形 $ABCD$，P 为其内一点. 求满足条件

$$S_{\triangle PAB}\cdot S_{\triangle PCD}=S_{\triangle PBC}\cdot S_{\triangle PDA}$$

的点 P 的轨迹.

（2005 年捷克－波兰－斯洛伐克数学奥林匹克）

解 若点 P 在对角线 AC 或 BD 上，不妨设在 AC 上，则 $\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PBC}}=\frac{AP}{PC}=\frac{S_{\triangle PDA}}{S_{\triangle PCD}}$ 是满足条件要求的等式.

设 AC 与 BD 交于点 O，且点 P 不在 AC 和 BD 上，不妨设点 P 在 $\triangle ABO$ 内. 设 BP 与 AC 交于点 Q，DP 与 AC 交于点 R，则

$$\frac{AQ}{QC}=\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PBC}},\frac{AR}{RC}=\frac{S_{\triangle PDA}}{S_{\triangle PCD}}$$

因为 $Q\neq R$，所以，上面的两式不相等.

综上所述，满足条件的点 P 的轨迹为线段 AC 和 BD（不包含端点）.

126 已知在一条直线上依次排列着 A,B,C 三个点，A',B' 是在直线 AB 同侧的两个点，且满足 $AA'\parallel BB'$，点 A',B',C 不在一条直线上. 设 $\triangle AA'C$ 和 $\triangle BB'C$ 的外心分别为 O_1,O_2. 若 $S_{\triangle A'CB'}=S_{\triangle O_1CO_2}$，求 $\angle CAA'$ 的度数.

（2005 年丝绸之路数学竞赛）

解 如图 159，若 $\angle CAA'$ 是锐角，则

$$\angle CO_1A'=2\angle CAA'=2\angle CBB'=\angle CO_2B'$$

若 $\angle CAA'$ 是钝角，则

$$\angle CO_1A'=2(180^\circ-\angle CAA')=2(180^\circ-\angle CBB')=\angle CO_2B'$$

当 $\angle CAA'=90^\circ$ 时，O_1,O_2 分别是 $A'C$ 和 $B'C$ 的中点，不可能有 $S_{\triangle CA'B'}=S_{\triangle CO_1O_2}$. 因此

$$\angle CO_1A'=\angle CO_2B'$$

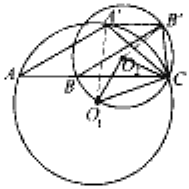


图 159

因为 $\triangle CO_1A'$ 和 $\triangle CO_2B'$ 都是等腰三角形，所以，$\triangle CO_1A' \backsim \triangle CO_2B'$. 于是

$$\angle O_1CA' = \angle O_2CB'$$

进而，$\angle O_1CO_2 = \angle A'CB'$，且 $\frac{CA'}{CO_1} = \frac{CB'}{CO_2}$. 故 $\triangle A'CB' \backsim \triangle O_1CO_2$，则

$$S_{\triangle A'CB'} = S_{\triangle O_1CO_2} \Leftrightarrow \triangle A'CB' \cong \triangle O_1CO_2 \Leftrightarrow CO_1 = CA' \Leftrightarrow$$
$$\triangle CO_1A' \text{ 是正三角形} \Leftrightarrow$$
$$\angle CO_1A' = 60°$$

当 $\angle CAA'$ 是锐角时，$\angle CAA' = 30°$.

当 $\angle CAA'$ 是钝角时，$\angle CAA' = 150°$.

127 设 D,E,F 分别是 $\triangle ABC$ 边 BC、CA、AB 上的内点，并且 $\triangle AEF$、$\triangle BFD$ 与 $\triangle CDE$ 的内切圆半径都等于 $\triangle ABC$ 内切圆半径的一半. 证明：D,E,F 恰好是 $\triangle ABC$ 各边的中点.

（2005 年巴尔干地区数学奥林匹克）

证明　设 $\triangle ABC$ 的内切圆的半径为 r，I、A_1、B_1、C_1 分别为 $\triangle ABC$、$\triangle AFE$、$\triangle BDF$、$\triangle CED$ 的内心. 由于从圆外一点到圆的两条切线的长相等，故 $\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle DEF$ 的周长相等.

另外，这两个三角形构成六边形 $A_1FB_1DC_1E$，且每个三角形的顶点到另一个三角形对应边的距离相等，即点 A_1 到边 FE 的距离是 $\frac{r}{2}$，点 F 到边 A_1B_1 的距离是 $\frac{r}{2}$，等等. 又因为这两个三角形有相同的周长，于是，有

$$S_{\triangle DEF} = S_{\triangle A_1B_1C_1}$$

显然，$\triangle A_1B_1C_1$ 与 $\triangle ABC$ 位似，位似中心为 I，位似比为 $\frac{1}{2}$，因而

$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{1}{4} \qquad ①$$

令 D_0、E_0、F_0 分别表示边 BC、CA、AB 的中点，将 $\frac{BD}{BC}$，$\frac{CE}{CA}$，$\frac{AF}{AB}$ 分别记为 $\frac{1}{2}+x$，$\frac{1}{2}+y$，$\frac{1}{2}+z$. 则 x,y,z 或者全在 $\left(-\frac{1}{2},0\right]$ 中，或者全在 $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 中.

事实上，如果 $x<0<y$，则 $\triangle CDE$ 的内切圆半径将大于 $\triangle CD_0E_0$ 的内切圆半径，而这是不可能的（因为两个内切圆半径

都是$\frac{r}{2}$).

利用这些记号,可得

$$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AE}{AC}\cdot\frac{AF}{AB}=\left(\frac{1}{2}-y\right)\left(\frac{1}{2}+z\right)=$$

$$\frac{1}{4}+\frac{z-y}{2}-yz$$

类似地有

$$\frac{S_{\triangle BFD}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{4}+\frac{x-z}{2}-zx$$

$$\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{1}{4}+\frac{y-x}{2}-xy$$

故

$$\frac{S_{\triangle DEF}}{S_{\triangle ABC}}=1-\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABC}}-\frac{S_{\triangle BFD}}{S_{\triangle ABC}}-\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle ABC}}=$$

$$\frac{1}{4}+yx+yz+zx$$

由于 x,y,z 或者全是非负的,或者全是非正的,利用式 ① 可以断定必有 $x=y=z=0$.

因此,D,E,F 恰好是 $\triangle ABC$ 各边的中点.

第二章 有关圆的试题

① 设 $ABCD$ 是面积为 2 的长方形，P 为边 CD 上的一点，Q 为 $\triangle PAB$ 的内切圆与边 AB 的切点．$PA \cdot PB$ 的值随着长方形 $ABCD$ 及点 P 的变化而变化，当 $PA \cdot PB$ 取最小值时，(1) 证明：$AB \geqslant 2BC$；(2) 求 $AQ \cdot BQ$ 的值．

（2001 年中国西部数学奥林匹克）

证明 (1) 由于 $S_{\triangle APB} = \frac{1}{2}S_{矩形ABCD} = 1$，从而

$$\frac{1}{2}PA \cdot PB \cdot \sin\angle APB = 1$$

即
$$PA \cdot PB = \frac{2}{\sin\angle APB} \geqslant 2$$

等号仅当 $\angle APB = 90°$ 时成立．这表明点 P 在以 AB 为直径的圆上，该圆应与 CD 有公共点，于是，$PA \cdot PB$ 取最小值时，应有 $BC \leqslant \frac{AB}{2}$，即 $AB \geqslant 2BC$．

(2) 设 $\triangle APB$ 的内切圆半径为 r，则

$$PA \cdot PB = (r + AQ)(r + BQ) = r(r + AQ + BQ) + AQ \cdot BQ$$

而
$$PA \cdot PB = 2S_{\triangle APB}, r(r + AQ + BQ) = S_{\triangle APB}$$

于是
$$AQ \cdot BQ = S_{\triangle APB} = 1$$

② 已知等腰 $\triangle ABC(AB = BC)$ 中，平行于 BC 的中位线交 $\triangle ABC$ 的内切圆于点 F，其中 F 不在底边 AC 上．证明：过 F 的切线与 $\angle C$ 的平分线的交点在边 AB 上．

（2003 年俄罗斯数学奥林匹克）

证明 如图 1，设 $\triangle ABC$ 的内切圆为圆 I．过 F 作圆 I 的切线交 AB 于点 P，交 AC 于点 Q，设 MN 为中位线，则 BM 过点 I．又设圆 I 与 AB，BC 分别切于点 D，E，$\angle MBA = \angle MBC = \alpha$，则 $\angle BID = 90° - \alpha$．因为 $BD = BE$，所以，劣弧 DE 所对圆周角为 $90° - \alpha$．

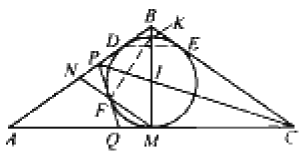


图 1

设 BM 交圆 I 于点 K，联结 FK，则 $\angle KFM = 90°$．

因为 $MN \parallel BC$，所以

$$\angle NMB = \angle MBC = \alpha, \angle FKM = 90° - \alpha$$

则 $FM = DE$．又

$$\angle FMQ = \angle BCM = 90^\circ - \alpha = \angle BED, QM = QF$$

于是，$\triangle BED \cong \triangle QMF$，有 $QM = BE$. 则 $CQ = CB$.

因为 $BD = QF, PF = PD$，所以

$$PQ = PB, \angle PBC = \angle PQC = 2\alpha$$

从而 $\triangle PBC \cong \triangle PQC, \angle BCP = \angle QCP$

故过点 F 的切线与 $\angle C$ 的平分线的交点在边 AB 上.

③ 已知 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，$AB \neq AC$，以 BC 为直径的圆分别交边 AB, AC 于点 M, N，记 BC 的中点为 O，$\angle BAC$ 的平分线和 $\angle MON$ 的平分线相交于点 R. 求证：$\triangle BMR$ 的外接圆和 $\triangle CNR$ 的外接圆有一个交点在边 BC 上.

（2004 年国际数学奥林匹克）

证明 如图 2，首先，证 A, M, R, N 共圆. 因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，故 M, N 分别在线段 AB, AC 上. 在射线 AR 上取一点 R_1，使 A, M, R_1, N 共圆. 因为 AR_1 平分 $\angle BAC$，故 $R_1M = R_1N$. 而点 M、N 在以 O 为圆心的圆上，故 $OM = ON$. 由 $OM = ON, R_1M = R_1N$ 知点 R_1 在 $\angle MON$ 的平分线上，而 $AB \neq AC$，则 $\angle MON$ 的平分线与 $\angle BAC$ 的平分线不重合，不平行，有唯一交点 R，从而 $R_1 = R$，即 A, M, R, N 共圆.

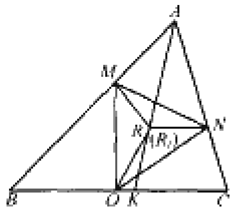


图 2

其次，设 AR 的延长线交 BC 于 K，则 K 在 BC 边上. 因为 B, C, N, M 共圆，故 $\angle MBC = \angle ANM$. 又因为 A, M, R, N 共圆，故 $\angle ANM = \angle MRA$. 从而 $\angle MBK = \angle MRA$. 所以 B, M, R, K 共圆.

同理可证 C, N, R, K 共圆.

④ 在凸四边形 $ABCD$ 中，对角线 BD 既不是 $\angle ABC$ 的平分线，也不是 $\angle CDA$ 的平分线，点 P 在四边形 $ABCD$ 内部，满足 $\angle PBC = \angle DBA$ 和 $\angle PDC = \angle BDA$. 证明：$ABCD$ 为圆内接四边形的充分必要条件是 $AP = CP$.

（2004 年国际数学奥林匹克）

证法 1 1）必要性：设 $ABCD$ 内接于圆 Γ. 延长 BP, DP 交 $ABCD$ 的外接圆 Γ 于点 X, Y.

由 $\angle PBC = \angle DBA$，DB 不平分 $\angle ABC$ 及 P 在 $ABCD$ 内知 $\overset{\frown}{CX} = \overset{\frown}{AD}$，且 $D \neq X$. D, X 在直线 AC 同侧. 因此 $DX \parallel AC$.

同理 $B \neq Y, BY \parallel AC$.

由 $DX \parallel AC, AC \parallel BY, D \neq X, B \neq Y, D, X, A, C, B, Y$ 均在 Γ 上知以下三个点对均关于 AC 的垂直平分线 l 对称：(D, X)、

$(A,C),(B,Y)$.

而 $P=DY\cap BX$,故 P 在 l 上,即 $AP=CP$.

必要性得证.

2) 充分性:先证一个引理:设 l,A,B,C 分别为定直线及三个定点,A 与 B,C 分别位于 l 的两侧.如果点 $X\in l$,并且直线 XA 逆时针转到直线 l 所需最小角度 $\alpha(X)$ 等于直线 XC 逆时针转到直线 XB 所需最小角度 $\beta(X)$,则称 X 为好点.好点至多有两个.

以 l 为 x 轴,垂直于 l 的直线为 y 轴建立坐标系.设 $A(a,b)$,$B(c,d)$,$C(e,f)$,$X(x,0)$,则 A,B,C,X 对应的复数为

$$A=a+b\mathrm{i},B=c+d\mathrm{i},C=e+f\mathrm{i},X=x$$

从而

$$A-X=a-x+b\mathrm{i}$$

$$\begin{aligned}&(a-x+b\mathrm{i})[\cos\alpha(X)+\mathrm{i}\cdot\sin\alpha(X)]=\\&(a-x)\cos\alpha(X)-b\cdot\sin\alpha(X)+\\&[(a-x)\sin\alpha(X)+b\cdot\cos\alpha(X)]\mathrm{i}\end{aligned}$$

因为直线 XA 逆时针转角度 $\alpha(X)$ 后与 l 重合,故

$$(a-x)\sin\alpha(X)+b\cdot\cos\alpha(X)=0 \qquad ①$$

又

$$\overrightarrow{XC}=e-x+f\mathrm{i},\overrightarrow{XB}=c-x+d\mathrm{i}$$

故 XC 逆时针转 $\beta(X)$ 角度后变为

$$\begin{aligned}&(e-x+f\mathrm{i})[\cos\beta(X)+\mathrm{i}\cdot\sin\beta(X)]=\\&(e-x)\cos\beta(X)-f\cdot\sin\beta(X)+\\&[(e-x)\sin\beta(X)+f\cdot\cos\beta(X)]\mathrm{i}\end{aligned}$$

它应与 $\overrightarrow{XB}$ 平行,即

$$\begin{aligned}&(c-x)[(e-x)\sin\beta(X)+f\cdot\cos\beta(X)]-\\&d[(e-x)\cos\beta(X)-f\cdot\sin\beta(X)]=0\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&[(c-x)(e-x)+df]\sin\beta(X)+\\&[(c-x)f-d(e-x)]\cos\beta(X)=0 \qquad ②\end{aligned}$$

由于 $\sin\theta,\cos\theta$ 不全为0,故 X 为好点 $\Leftrightarrow\alpha(X)=\beta(X)\overset{①②}{\Longleftrightarrow}$ 关于 u,v 的线性方程组

$$\begin{cases}(a-x)u+bv=0\\ [(c-x)(e-x)+df]u+[(c-x)f-d(e-x)]v=0\end{cases}$$

有非零解 $\Leftrightarrow$

$b[(c-x)(e-x)+df]+(a-x)[(c-x)f-d(e-x)]=0\Leftrightarrow$

$(b+d-f)x^2+(af+cf-bc-be-ad-ed)x+$

$bce+bdf+ade-acf=0$

令 $g(x)=(b+d-f)x^2+(af+cf-bc-be-ad-ed)x+$

$bce+bdf+ade-acf$

若 $b+d-f=0$,则由 $b\neq0$ 知 $d\neq f$.从而 BC 与 l 不平行,设 BC 与 l 相交于点 $T(t,0)$,则 $\beta(T)=0,\alpha(T)>0$.因此 T 不是好点,从

而 $g(t)\neq 0$.所以 $g(x)=0$ 至多有两个根.因而至多有两个好点.

引理得证.

下面回到原题.

设 A,B,C,D 顺时针排列,$AP=CP$.在射线 BD 上取点 D^*,使 A,D^*,C,B 四点共圆.由于 BD 不平分 $\angle ABC$,$\angle ADC$ 及 $AP=CP$ 知 P 是直线 BP 与 AC 的垂直平分线的唯一交点.

设射线 D^*R 使 $\angle CD^*R=\angle AD^*B$,并设 $D^*R\cap BP=P^*$.

由 1) 知 $P^*A=P^*C$,即 P^* 也是 l 与 AC 垂直平分线的交点.从而 $P^*=P$.由此及 $\angle CD^*R=\angle AD^*B$ 知 $\angle AD^*B=\angle CD^*P$.

用 BD,A,C,P 分别代替引理中的 l,A,B,C,则 B,D,D^* 均为好点.又 $B\neq D,B\neq D^*$,故 $D=D^*$.由此知 A,B,C,D 四点共圆,充分性得证.

综合 1),2) 结论成立.证毕.

证法 2 不妨设 P 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle BCD$ 内,如图 3 所示.

设 $ABCD$ 为圆内接四边形.直线 BP,DP 分别交 AC 于 K 和 L.因为

$$\angle PBC=\angle DBA,\angle PDC=\angle BDA$$
$$\angle ACB=\angle ADB,\angle ABD=\angle ACD$$

故 $\triangle DAB,\triangle DLC,\triangle CKB$ 两两相似.

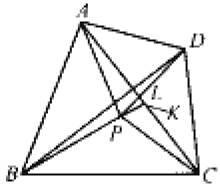


图 3

从而 $\angle DLC=\angle CKB$.因而 $\angle PLK=\angle PKL$.所以 $PK=PL$.

因为 $\angle BDA=\angle PDC$,故 $\angle ADL=\angle BDC$.又 $\angle DAL=\angle DBC$,故 $\triangle ADL\backsim\triangle BDC$.因此

$$\frac{AL}{BC}=\frac{AD}{BD}=\frac{KC}{BC}$$

(后一等号用到 $\triangle DAB\backsim\triangle CKB$).由此知 $AL=KC$.

因为 $\angle DLC=\angle CKB$,故 $\angle ALP=\angle CKP$.又因为 $PK=PL,AL=KC$,故 $\triangle ALP\cong\triangle CKP$.所以 $AP=CP$.

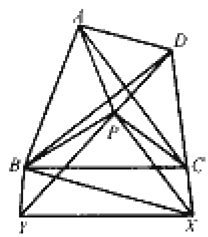


图 4

反过来,设 $AP=CP$.设 $\triangle BCP$ 的外接圆分别交直线 CD,DP 于点 X 和 Y,如图 4 所示.因为

$$\angle ADB=\angle PDX,\angle ABD=\angle PBC=\angle PXC$$

故 $\triangle ADB\backsim\triangle PDX$.从而

$$\frac{AD}{PD}=\frac{BD}{XD}$$

又
$$\angle ADP=\angle ADB+\angle BDP=\angle PDX+\angle BDP=\angle BDX$$

故 $\triangle ADP\backsim\triangle BDX$.因此

$$\frac{BX}{AP}=\frac{BD}{AD}=\frac{XD}{PD} \quad ①$$

因为 P,C,X,Y 共圆，故

$$\angle DPC=\angle DXY,\angle DCP=\angle DYX$$

从而 $\triangle DPC \backsim \triangle DXY$. 因此

$$\frac{YX}{CP}=\frac{XD}{PD} \quad ②$$

由 $AP=CP$，① 和 ② 得 $BX=YX$. 因此

$$\angle DCB=\angle XYB=\angle XBY=\angle XPY=\angle PDX+\angle PXD=$$
$$\angle ADB+\angle ABD=180^\circ-\angle BAD$$

所以四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形.

⑤ 设 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，A_1,B_1 和 C_1 分别是 PA 和 BC，PB 和 CA，PC 和 AB 的交点，A_2,B_2 和 C_2 分别是 B_1C_1 和 BC，C_1A_1 和 CA，A_1B_1 和 AB 的交点. W_1,W_2 和 W_3 分别是以 A_1A_2，B_1B_2 和 C_1C_2 为直径的圆. 求证：W_1,W_2 和 W_3 有一个公共点的充要条件是 W_1 和 W_2 有公共点.

（2003 年中国国家集训队训练题）

证明　先证一个引理：一条直线上顺次排列着 A,B,C,D 四点，且有 $\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}$，直线外一点 P 满足 $\angle BPD=\frac{\pi}{2}$，则 BP 为 $\triangle APC$ 的一条内角平分线，PD 为同一角的外角平分线.

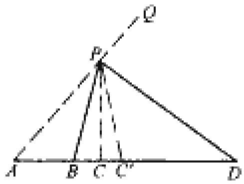


图 5

引理的证明：如图 5 所示，作

$$\angle QPD=\pi-\angle APD=\frac{\pi}{2}-\angle APB=$$
$$\frac{\pi}{2}-\angle BPC'=\angle DPC'$$

所以 DP 为 $\angle QPC'$ 的平分线，由内、外角平分线性质定理知

$$\frac{AB}{BC'}=\frac{AP}{PC'}=\frac{AD}{DC'}$$

又
$$\frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC}$$

两式相除得
$$\frac{BC}{CD}=\frac{BC'}{C'D}$$

而 C,C' 均在线段 BD 上，故 C 与 C' 是同一个点. 所以 PB 为 $\angle APC$ 的平分线，PD 为其外角平分线，引理得证.

下面回到原题，必要性显然，证明充分性.

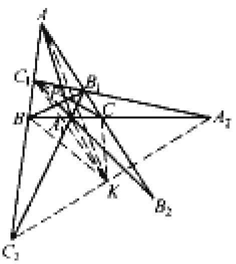


图 6

如图 6，设 K 为 W_1 与 W_2 的一个交点，联结 AK,BK,CK,C_1K，C_2K,A_1K,A_2K. 视 $A_2B_1C_1$ 为 $\triangle ABC$ 的截线，由梅氏定理得

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_2}{A_2C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1 \qquad ①$$

视 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，由塞瓦定理得

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1 \qquad ②$$

① ÷ ② 得
$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BA_2}{A_2C}$$

由 $K\in W_1$，知 $\angle A_1KA_2=\frac{\pi}{2}$，由引理知 KA_1 为 $\angle BKC$ 的平分线，再由角平分线性质定理知 $\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BK}{KC}$.

同理 $\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{CK}{KA}$，故 $\frac{BK}{KA}=\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}$. 由 ② 得 $\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{BC_1}{C_1A}$，所以，$\frac{BK}{KA}=\frac{BC_1}{C_1A}$，进而 KC_1 为 $\angle AKB$ 的平分线.

又同理可知 $\frac{BC_2}{C_2A}=\frac{BC_1}{C_1A}=\frac{BK}{KA}$，所以，$KC_2$ 为 $\angle AKB$ 之外角平分线，故

$$\angle C_1KC_2=\frac{1}{2}[\angle AKB+(\pi-\angle AKB)]=\frac{\pi}{2}$$

所以，$K\in W_3$. 充分性获证，故原命题成立.

⑥ 点 O 为一个单位圆的圆心，$A_1A_2\cdots A_{2n}$ 为该单位圆的内接凸 $2n$ 边形. 求证：

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\overrightarrow{A_{2i-1}A_{2i}}\right|\leqslant 2\sin\frac{\angle A_1OA_2+\angle A_3OA_4+\cdots+\angle A_{2n-1}OA_{2n}}{2}$$

（2003 年中国国家集训队训练题）

证明　先来看 $n=2$ 的情况，若 $A_1A_2 /\!/ A_3A_4$，则

$$\left|\sum_{i=1}^{2}\overrightarrow{A_{2i-1}A_{2i}}\right|=\left|\,|\overrightarrow{A_1A_2}|-|\overrightarrow{A_3A_4}|\,\right|$$

若不然，不妨设是图 7 所示的情况，设 A_2A_1 与 A_3A_4 延长线交于 T，$\angle A_1OA_2=2\alpha$，$\angle A_3OA_4=2\beta$，则

$$\angle T=\angle A_2A_4A_3-\angle A_1A_2A_4=$$
$$\frac{1}{2}(\angle A_2OA_3-\angle A_1OA_4)<$$
$$\frac{1}{2}(\angle A_2OA_3+\angle A_1OA_4)=$$
$$\frac{1}{2}(2\pi-2\alpha-2\beta)=\pi-\alpha-\beta$$

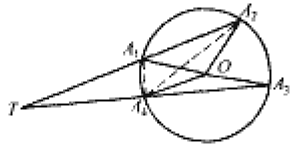


图 7

所以，$\overrightarrow{A_1A_2}$ 与 $\overrightarrow{A_3A_4}$ 所成最小正角 $\delta=\pi-\angle T>\alpha+\beta$. 于是

$|\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_3A_4}|=$

$\sqrt{|\overrightarrow{A_1A_2}|^2+|\overrightarrow{A_3A_4}|^2+2|\overrightarrow{A_1A_2}|\cdot|\overrightarrow{A_3A_4}|\cdot\cos\delta}<$

$\sqrt{|\overrightarrow{A_1A_2}|^2+|\overrightarrow{A_3A_4}|^2+2|\overrightarrow{A_1A_2}|\cdot|\overrightarrow{A_3A_4}|\cdot\cos(\alpha+\beta)}=$

$\sqrt{(2\sin\alpha)^2+(2\sin\beta)^2+2\cdot2\sin\alpha\cdot2\sin\beta\cdot\cos(\alpha+\beta)}=$

$2\sin(\alpha+\beta)$（这可以通过构造内接于单位圆的 $\triangle ABC$，其中 $\angle A=\alpha,\angle B=\beta$，利用余弦定理得到）$=$

$2\sin\dfrac{\angle A_1OA_2+\angle A_3OA_4}{2}$

若 $\overrightarrow{A_1A_2}\mathbin{/\mkern-5mu/}\overrightarrow{A_3A_4}$，则视它们所成最小正角为 π，由 $\pi>\alpha+\beta$ 知上面过程依然适用．故不论怎样，原命题对 $n=2$ 成立．

下面假设原命题对 $n=k-1$（$k\geqslant3$ 是整数）成立，考虑 $n=k$ 的情况．

记 $A_{2k+p}=A_p(p=1,2,\cdots,2k)$，若左边为 0，则由

$$0<\angle A_1OA_2+\angle A_3OA_4+\cdots+\angle A_{2k-1}OA_{2k}<2\pi$$

知右边大于 0，此时命题已然成立，以下设左边不为 0．

取点 M 使 $\sum\limits_{i=1}^{k}\overrightarrow{A_{2i-1}A_{2i}}=\overrightarrow{OM}$，记 $\overset{\frown}{A_{2j}A_{2j+2}}$（包含点 A_{2j+1} 的那一段弧）中点为 $B_j(j=1,2,\cdots,k)$，则对任意 $1\leqslant j\leqslant k$，有

$\angle B_jOB_{j+1}$（包含 A_{2j+2} 的角）$=\dfrac{1}{2}(\angle A_{2j}OA_{2j+2}+\angle A_{2j+2}OA_{2j+4})<$

$$2\pi\cdot\frac{1}{2}=\pi$$

其中 $B_{k+1}=B_1$，因此至少存在一个 $1\leqslant i\leqslant k$ 使 $\overrightarrow{OB_i}$ 与 $\overrightarrow{OM}$ 所成最小正角不大于 $\dfrac{\pi}{2}$（若不然，过 O 作直线 $l\perp OM$，则直线 l 分平面为两部分，含 M 的那部分不包含任何 B_i 中的点，这与刚才的结论矛盾）．

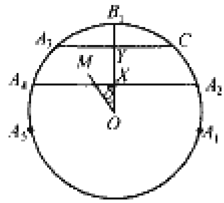


图 8

不妨设 $\overrightarrow{OB_1}$ 与 $\overrightarrow{OM}$ 所成最小正角不大于 $\dfrac{\pi}{2}$，如图 8 所示．设 $\overrightarrow{OB_1}$ 与 $\overrightarrow{OM}$ 所成最小正角为 δ，设 A_3 关于 OB_1 的对称点为 C，联结 CA_3 交 OB_1 于 Y，联结 A_2A_4 交 OB_1 于 X．

记 $D_1=A_1,D_2=A_4,D_3=A_5,D_4=A_6,\cdots,D_{2k-2}=A_{2k}$，则 $D_1D_2\cdots D_{2k-2}$ 为圆 O 的内接凸 $2k-2$ 边形，由归纳假设有

$$\left|\sum_{i=1}^{k-1}\overrightarrow{D_{2i-1}D_{2i}}\right|\leqslant2\sin\frac{\angle D_1OD_2+\angle D_3OD_4+\cdots+\angle D_{2k-3}OD_{2k-2}}{2}$$

而

$$\begin{aligned}&\angle D_1OD_2+\angle D_3OD_4+\cdots+\angle D_{2k-3}OD_{2k-2}=\\&\angle A_1OC+\angle A_5OA_6+\cdots+\angle A_{2k-1}OA_{2k}=\\&\angle A_1OA_2+\angle A_2OC+\angle A_5OA_6+\cdots+\angle A_{2k-1}OA_{2k}=\\&\angle A_1OA_2+\angle A_3OA_4+\angle A_5OA_6+\cdots+\angle A_{2k-1}OA_{2k}\end{aligned}$$

$$\left|\sum_{i=1}^{k-1}\overrightarrow{D_{2i-1}D_{2i}}\right| = |\overrightarrow{D_1D_2}+\overrightarrow{D_3D_4}+\overrightarrow{D_5D_6}+\cdots+\overrightarrow{D_{2k-3}D_{2k-2}}| =$$

$$|\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{A_5A_6}+\overrightarrow{A_7A_8}+\cdots+\overrightarrow{A_{2k-1}A_{2k}}| =$$

$$|\overrightarrow{A_1C}+\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{A_1A_2}-\overrightarrow{A_3A_4}| =$$

$$|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA_3}-\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{OA_4}| =$$

$$|\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{A_2C}-\overrightarrow{A_3A_4}| =$$

$$|\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{OY}-2\overrightarrow{OX}| = |\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{XY}| =$$

$$\sqrt{|\overrightarrow{OM}|^2+|2\overrightarrow{XY}|^2+2|\overrightarrow{OM}|\cdot|2\overrightarrow{XY}|\cdot\cos\delta}$$

（这是因为$\overrightarrow{XY}$与$\overrightarrow{OB_1}$方向相同）>

$$\sqrt{|\overrightarrow{OM}|^2} = |\overrightarrow{OM}|$$

所以，此时有

$$\left|\sum_{i=1}^{k}\overrightarrow{A_{2i-1}A_{2i}}\right| = |\overrightarrow{OM}| < \left|\sum_{i=1}^{k}\overrightarrow{D_{2i-1}D_{2i}}\right| \leqslant$$

$$2\sin\frac{\angle D_1OD_2+\angle D_3OD_4+\cdots+\angle D_{2k-3}OD_{2k-2}}{2} =$$

$$2\sin\frac{\angle A_1OA_2+\angle A_3OA_4+\cdots+\angle A_{2k-1}OA_{2k}}{2}$$

即原命题对 $n = k$ 亦成立.

由数学归纳法原理，命题对一切不小于 2 的整数 n 成立，证毕.

⑦ 给定 a，$\sqrt{2} < a < 2$，内接于单位圆 Γ 的凸四边形 $ABCD$ 适合以下条件：

（1）圆心在这凸四边形内部；

（2）最大边长是 a，最小边长是 $\sqrt{4-a^2}$，过点 A，B，C，D 依次作圆 Γ 的 4 条切线 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，$\angle D$. 已知 $\angle A$ 与 $\angle B$，$\angle B$ 与 $\angle C$，$\angle C$ 与 $\angle D$，$\angle D$ 与 $\angle A$ 分别交于 A'，B'，C'，D'. 求面积之比 $\frac{S_{四边形A'B'C'D'}}{S_{四边形ABCD}}$ 的最大值与最小值.

（2001 年中国数学冬令营）

解　如图 9，设 $\angle AOB = 2\theta_1$，$\angle BOC = 2\theta_2$，$\angle COD = 2\theta_3$，$\angle DOA = 2\theta_4$. 因为圆的半径为 1，所以

$$S_{四边形ABCD} = \frac{1}{2}(\sin 2\theta_1+\sin 2\theta_2+\sin 2\theta_3+\sin 2\theta_4)$$

$$S_{四边形A'B'C'D'} = 2(S_{\triangle A'AO}+S_{\triangle BOB'}+S_{\triangle COC'}+S_{\triangle DOD'}) =$$

$$\tan\theta_1+\tan\theta_2+\tan\theta_3+\tan\theta_4$$

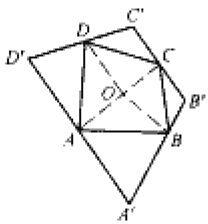


图 9

所以

$$\frac{S_{\text{四边形}A'B'C'D'}}{S_{\text{四边形}ABCD}}=\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2+\tan\theta_3+\tan\theta_4}{\frac{1}{2}(\sin 2\theta_1+\sin 2\theta_2+\sin 2\theta_3+\sin 2\theta_4)} \quad ①$$

而 $AB=2\sin\theta_1, BC=2\sin\theta_2, CD=2\sin\theta_3, DA=2\sin\theta_4$，由式①的对称性，可不妨设 AB 最大，BC 最小．所以

$$\sin\theta_1=\frac{a}{2},\sin\theta_2=\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}$$

由于 $\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4$ 均为锐角

$$\cos\theta_1=\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}=\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}=\sin\theta_2=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right)$$

所以 $\theta_1+\theta_2=90°$．又

$$\theta_1+\theta_2+\theta_3+\theta_4=\frac{1}{2}\times 360°=180°$$

所以 $\theta_3+\theta_4=90°$，令 $\sin\theta_3\cdot\cos\theta_3=t$，由式①得

$$\frac{S_{\text{四边形}A'B'C'D'}}{S_{\text{四边形}ABCD}}=\frac{\frac{a}{\sqrt{4-a^2}}+\frac{\sqrt{4-a^2}}{a}+\tan\theta_3+\frac{1}{\tan\theta_3}}{\frac{a\sqrt{4-a^2}}{2}+\sin 2\theta_3}=$$

$$\frac{\frac{4}{a\sqrt{4-a^2}}+\frac{1}{t}}{\frac{a}{2}\sqrt{4-a^2}+2t}$$

上式是关于 t 在 $(0,+\infty)$ 内的减函数．

由 $t=\frac{1}{2}\sin 2\theta_3\leqslant\frac{1}{2}$，又 $\theta_2\leqslant\theta_3,\theta_4\leqslant\theta_1$，且

$$t=\frac{1}{2}\sin 2\theta_3=\sin\theta_3\cdot\cos\theta_3\geqslant\sin\theta_2\cdot\sin\theta_1=$$

$$\frac{1}{2}\sin 2\theta_2=\frac{a}{4}\sqrt{4-a^2}$$

所以最大值为

$$\frac{\frac{4}{a\sqrt{4-a^2}}+\frac{4}{a\sqrt{4-a^2}}}{\frac{a\sqrt{4-a^2}}{2}+\frac{a\sqrt{4-a^2}}{2}}=\frac{8}{a^2(4-a^2)}\quad\left(t=\frac{a}{4}\sqrt{4-a^2}\right)$$

最小值为
$$\frac{\frac{4}{a\sqrt{4-a^2}}+2}{\frac{a}{2}\sqrt{4-a^2}+1}=\frac{4}{a\sqrt{4-a^2}}\quad\left(t=\frac{1}{2}\right)$$

⑧ 已知凸四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 和 BD 互相垂直，且交于点 O. 设 $\triangle AOB$, $\triangle BOC$, $\triangle COD$, $\triangle DOA$ 的内切圆的圆心分别为 O_1, O_2, O_3, O_4. 证明：

(1) 圆 O_1，圆 O_2，圆 O_3，圆 O_4 的直径之和不超过 $(2-\sqrt{2})(AC+BD)$；

(2) $O_1O_2+O_2O_3+O_3O_4+O_4O_1<2(\sqrt{2}-1)(AC+BD)$.

(2003 年白俄罗斯数学奥林匹克)

证明 (1) 如图 10，设直角三角形的三条边的边长分别为 a, b, c，其中 c 是斜边的长，则内切圆直径为 $d=a+b-c$. 因为

$$c=\sqrt{a^2+b^2}\geqslant\frac{a+b}{\sqrt{2}}$$

则

$$d\leqslant a+b-\frac{a+b}{\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}(a+b)$$

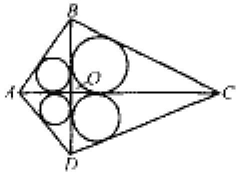


图 10

如图 10，设圆 O_1，圆 O_2，圆 O_3，圆 O_4 的直径分别为 d_1, d_2, d_3, d_4. 则

$$d_1\leqslant\frac{2-\sqrt{2}}{2}(AO+BO)$$

$$d_2\leqslant\frac{2-\sqrt{2}}{2}(BO+CO)$$

$$d_3\leqslant\frac{2-\sqrt{2}}{2}(CO+DO)$$

$$d_4\leqslant\frac{2-\sqrt{2}}{2}(DO+AO)$$

故

$$d_1+d_2+d_3+d_4\leqslant(2-\sqrt{2})(AC+BD)$$

(2) 如图 11，设圆 O_1，圆 O_2 的半径分别为 r_1, r_2. 由勾股定理，得

$$O_1O_2^2=(r_1+r_2)^2+(r_1-r_2)^2=2(r_1^2+r_2^2)$$

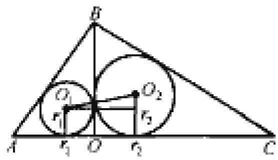


图 11

即

$$O_1O_2=\sqrt{2}\cdot\sqrt{r_1^2+r_2^2}<\sqrt{2}(r_1+r_2)$$

类似地，有

$$O_2O_3<\sqrt{2}(r_2+r_3)$$

$$O_3O_4<\sqrt{2}(r_3+r_4)$$

$$O_4O_1<\sqrt{2}(r_4+r_1)$$

将这四个不等式求和，得

$$O_1O_2+O_2O_3+O_3O_4+O_4O_1<\sqrt{2}(d_1+d_2+d_3+d_4)\leqslant 2(\sqrt{2}-1)(AC+BD)$$

⑨ 设 I 是 $\triangle ABC$ 的 $\angle BAC$ 平分线上的一点，M,N 分别是边 AB,AC 上的点，且使得 $\angle ABI=\angle NIC$，$\angle ACI=\angle MIB$．证明：当且仅当点 M,N,I 共线时，I 是 $\triangle ABC$ 的内切圆圆心．

（2003 年克罗地亚数学竞赛）

证明　1）必要性：如图 12，设 I 是 $\triangle ABC$ 的内切圆圆心．$\angle A=\alpha$，$\angle B=\beta$，$\angle C=\gamma$．则

$$\angle NIC=\angle ABI=\frac{\beta}{2},\angle MIB=\angle ACI=\frac{\gamma}{2}$$

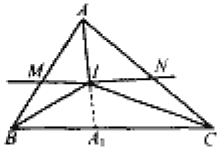


图 12

在 $\triangle BIC$ 中，有

$$\angle BIC=180^\circ-\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)$$

则
$$\angle MIN=\angle MIB+\angle BIC+\angle CIN=180^\circ$$

所以，M,N,I 三点共线．

2）充分性：假设 M,N,I 三点共线，令

$$\angle ABI=\angle NIC=\beta_1,\angle CBI=\beta_2=\beta-\beta_1$$

$$\angle ACI=\angle MIB=\gamma_1,\angle BCI=\gamma_2=\gamma-\gamma_1$$

设 A_1 是 $\angle BAC$ 的平分线 AI 和 BC 的交点，则

$$\angle BIA_1=\angle ABI+\angle BAI=\beta_1+\frac{\alpha}{2}$$

同理
$$\angle CIA_1=\gamma_1+\frac{\alpha}{2}$$

于是
$$\angle BIC=\alpha+\beta_1+\gamma_1$$

所以 $\angle MIN=\gamma_1+(\alpha+\beta_1+\gamma_1)+\beta_1=\alpha+2\beta_1+2\gamma_1$

由 $\angle MIN=180^\circ=\alpha+\beta+\gamma=\alpha+(\beta_1+\beta_2)+(\gamma_1+\gamma_2)$

得
$$\beta_1+\gamma_1=\beta_2+\gamma_2=\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$$

所以
$$\angle BIC=\alpha+\beta_1+\gamma_1=\alpha+\frac{\beta+\gamma}{2}=\frac{\alpha}{2}+90^\circ$$

满足 $\angle BIC=\frac{\alpha}{2}+90^\circ$ 的点的轨迹，与 $\angle BAC$ 的平分线在 $\triangle ABC$ 内的交点为 $\triangle ABC$ 的内心．因此，I 是内切圆的圆心（因为 M 和 N 在 $\triangle ABC$ 的边上，故 I 在三角形内部）．

⑩ 凸四边形 $ABCD$ 有内切圆，该内切圆切边 AB，BC，CD，DA 的切点分别为 A_1，B_1，C_1，D_1，联结 A_1B_1，B_1C_1，C_1D_1，D_1A_1，点 E，F，G，H 分别为 A_1B_1，B_1C_1，C_1D_1，D_1A_1 的中点．证明：四边形 $EFGH$ 为矩形的充分必要条件是 A，B，C，D 四点共圆．

（2003 年中国西部数学奥林匹克）

证明 如图 13，设 I 为四边形 $ABCD$ 的内切圆圆心．由于 H 为 D_1A_1 的中点，而 AA_1 与 AD_1 为过点 A 所作的圆 I 的切线，故 H 在 AI 上，且 $AI\perp A_1D_1$．

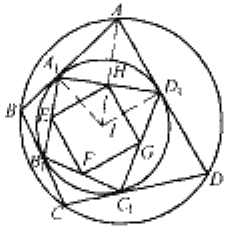


图 13

又 $ID_1\perp AD_1$，故由射影定理可知 $IH\cdot IA=ID_1^2=r^2$，其中 r 为内切圆半径．

同理可知，E 在 BI 上，且 $IE\cdot IB=r^2$．于是，$IE.IB=IH\cdot IA$，故 A，H，E，B 四点共圆．所以，$\angle EHI=\angle ABE$．

类似地，可证 $\angle IHG=\angle ADG$，$\angle IFE=\angle CBE$，$\angle IFG=\angle CDG$．将四个式子相加得

$$\angle EHG+\angle EFG=\angle ABC+\angle ADC$$

所以，A，B，C，D 四点共圆的充要条件是 E，F，G，H 四点共圆．而熟知一个四边形的各边中点围成的四边形是平行四边形．平行四边形为矩形的充要条件是该四边形的四个顶点共圆．因此．$EFGH$ 为矩形的充要条件是 A，B、C，D 四点共圆．

⑪ 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆为圆 S，且满足 $AB<AC$．过点 A 的高线交圆 S 于点 P，X 为线段 AC 上的点，且 BX 交圆 S 于 Q．证明：$BX=CX$ 的充分必要条件是 PQ 为圆 S 的直径．

（2002 ~ 2003 年英国数学奥林匹克）

证明 如图 14，由

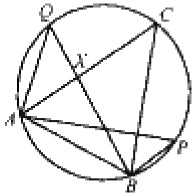


图 14

$$\angle CBP+\angle BCA=\angle CAP+\angle BCA=90^\circ$$
$$\angle CBP+\angle QBC=\angle QBP$$

两式相减得

$$\angle BCA-\angle QBC=90^\circ-\angle QBP$$

所以，PQ 是圆 S 的直径 $\Leftrightarrow\angle QBP=90^\circ\Leftrightarrow\angle BCA=\angle QBC\Leftrightarrow BX=CX$．

⑫ 设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，射线 AI, BI, CI 与 $\triangle ABC$ 的外接圆分别交于点 D, E, F. 证明：$AD \perp EF$.

（2002 ~ 2003 年芬兰高中数学竞赛）

证明 如图 15，设 G 是 AD 和 FE 的交点. 显然

$$\angle FAB = \angle FCB, \angle AFE = \angle ABE$$

在 $\triangle AFG$ 中

$$\angle AFG + \angle FAG = \angle AFE + \angle FAB + \angle BAD = \angle ABE + \angle BCF + \angle BAD$$

因为内心是三角形三条角平分线的交点，所以

$$\angle ABE + \angle BCF + \angle BAD = 90°$$

因此，$\angle AGF = 90°$. 故 $AD \perp EF$.

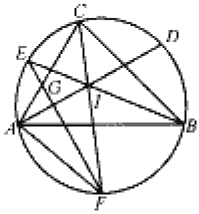


图 15

⑬ 已知 D 为 $\triangle ABC$ 的边 AB 上一点，使得 $4AD = AB$，过 D 的射线 l 满足与 DA 的夹角 $\theta = \angle ACB$，且射线 l 与点 C 在直线 AB 的同侧. 若 l 与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 P，证明：$PB = 2PD$.

（2002 ~ 2003 年英国数学奥林匹克）

证明 如图 16，因为

$$\angle ADP = \angle ACB = \angle APB$$
$$\angle DAP = \angle PAB$$

则 $\triangle ADP \backsim \triangle APB$.

由 $S_{\triangle ADP} = \frac{1}{4} S_{\triangle APB}$，知 $\triangle ADP$ 与 $\triangle APB$ 的相似比为 $1:2$. 于是有 $PB = 2PD$.

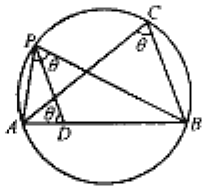


图 16

⑭ 锐角 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O，M, N 为直线 AC 上的两点，且满足 $MN = AC$. 设点 D 是点 M 在直线 BC 上的射影，点 E 是点 N 在直线 AB 上的射影. 证明：

(1) $\triangle ABC$ 的垂心位于以 O' 为圆心的 $\triangle BED$ 的外接圆上；

(2) 线段 AN 的中点与点 B 关于线段 OO' 的中点对称.

（2003 年越南数学奥林匹克）

证明 (1) 如图 17，设 K 是 MD 和 NE 的交点. 显然，BK 是 $\triangle BED$ 的外接圆直径. 由已知，$AH \parallel MK$，$CH \parallel NK$，则 $\angle HAC =$

$\angle KMN$，$\angle ACH = \angle MNK$. 又因为 $AC = MN$，所以，$\triangle AHC \cong \triangle MKN$.

于是，$d(K, AC) = d(H, AC)$.

又点 K 与点 H 位于直线 AC 的同侧，所以，$KH \parallel AC$. 因此，$KH \perp BH$，故点 H 位于以 BK 为直径的 $\triangle BED$ 的外接圆上.

(2) 由(1) 的证明可知，O' 是线段 BK 的中点. 设点 I 是线段 AN 的中点. 易知，点 I 在直线 BA 与 BC 上的射影分别是线段 EA 和 DC 的中点. 则向量 $\overrightarrow{O'I}$ 在直线 BA 上的射影与 BC 上的射影分别等于 $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ 和 $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. 这表明，$\overrightarrow{O'I} = \overrightarrow{BO}$. 因此，四边形 $BO'IO$ 是平行四边形. 故点 B 与点 I 关于线段 OO' 的中点对称.

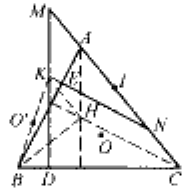


图 17

⑮ 两圆圆 O_1，圆 O_2 相切于点 M，圆 O_2 的半径大于圆 O_1 的半径. 点 A 是圆 O_2 上的一点，且满足 O_1，O_2 和 A 三点不共线. AB，AC 是点 A 到圆 O_1 的切线，切点分别为 B，C. 直线 MB，MC 与圆 O_2 的另一个交点分别为 E，F，点 D 是线段 EF 和圆 O_2 的以 A 为切点的切线的交点. 证明：当点 A 在圆 O_2 上移动且保持 O_1，O_2 和 A 三点不共线时，点 D 沿一条固定的直线移动.

(2003 年越南数学奥林匹克)

证明　分两种情形讨论.

1) 如图 18，圆 O_1 和圆 O_2 外切于点 M. 设 XY 是圆 O_1 和圆 O_2 的内公切线. 由于 CA 和 MY 是圆 O_1 的切线，切点分别是 C，M，则 $\angle FCA = \angle CMY$. 但是，$\angle CMY = \angle FMX$，因此，$\angle FCA = \angle FMX$. 又由于 $\angle FMX = \angle FAM$，故 $\angle FCA = \angle FAM$.

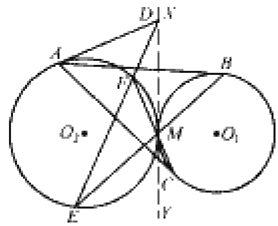


图 18

对于 $\triangle FMA$ 和 $\triangle FAC$，有

$$\angle MFA = \angle AFC, \angle FAM = \angle FCA$$

因此，$\triangle FMA \backsim \triangle FAC$. 于是 $\frac{MF}{FA} = \frac{AF}{FC}$，即 $FM \cdot FC = FA^2$.

又 $FM \cdot FC = FO_1^2 - R_1^2$，其中 R_1 是圆 O_1 的半径，于是，$FO_1^2 - FA^2 = R_1^2$.

同理可得 $EO_1^2 - EA^2 = R_1^2$. 因此

$$FO_1^2 - FA^2 = EO_1^2 - EA^2 = R_1^2$$

故 $EF \perp AO_1$.

由于点 D 位于直线 EF 上，则

$$DO_1^2 - DA^2 = R_1^2$$

即

$$DO_1^2 - R_1^2 = DA^2 \quad ①$$

又由于 DA 是圆 O_2 相切于点 A 的切线，所以

$$DA^2 = DO_2^2 - R_2^2 \quad ②$$

其中 R_2 是圆 O_2 的半径.

由 ① 和 ② 得

$$DO_1^2 - R_1^2 = DO_2^2 - R_2^2$$

这表明点 D 在圆 O_1 和圆 O_2 的根轴 XY 上.

2）圆 O_1 和圆 O_2 内切于点 M. 这种情况的证明与第一种情况类似.

⑯ 如图 19，3 个圆有公共弦 AB. 任一条过点 A 的直线 l 与 3 个圆的交点依次为 X,Y,Z，其中 $X \neq B$. 证明：$\frac{XY}{YZ}$ 为定值.

（2003 年加拿大数学奥林匹克）

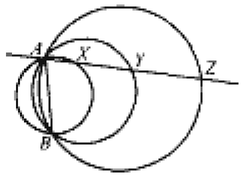


图 19

证明　如图 20，因为 3 个圆有公共弦 AB，故圆心 O_1,O_2,O_3 共线. 过 O_1,O_2,O_3 分别作 l 的垂线交 l 于点 H_1,H_2,H_3. 易知

$$AX = 2AH_1, AY = 2AH_2, AZ = 2AH_3$$

故

$$\frac{XY}{YZ} = \frac{H_1H_2}{H_2H_3} = \frac{O_1O_2}{O_2O_3}$$

为定值.

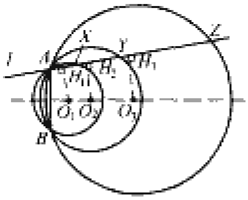


图 20

⑰ 已知五边形 $ABCDE$ 的内切圆与边 AE 切于点 P，且 $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E$. 证明：$AD,PC,EB$ 三线交于一点.

（2002 ~ 2003 年匈牙利数学奥林匹克）

证明　由布里昂雄（Brianchon）定理，AB,BC,CD,DE,EP,PA 为该五边形内切圆的六条切线，且交点依次为 A,B,C,D,E,P. 所以，AD,PC,EB 三线共点.

下面证明布里昂雄定理.

如图 21，在射线 AF 上任取一点 K，并在射线 CD 上取 K' 使得 $C'K' = F'K$. 易知过 K,K' 可作一个圆 Γ_1，使得 $KA,K'C$ 是圆 Γ 和圆 Γ_1 的两条外公切线.

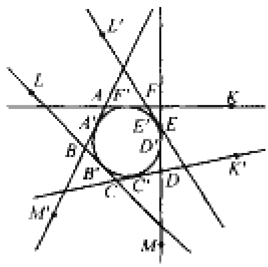


图 21

在射线 EF 上截取 L' 使 $FL' = FK$.

同理，在 CB 上作 L 使 $B'L = F'K$，在 AB 上作 M'，使 $A'M' = F'K$，在 ED 上作 M，使 $D'M = F'K$，以及 L',L 对应的圆 Γ_2，M',M 对应的圆 Γ_3.

由 K,K',L,L',M,M' 的作法可知，F 到圆 Γ_1 和圆 Γ_2 的圆幂相同，C 到圆 Γ_1 和圆 Γ_2 的圆幂相同. 所以，CF 为圆 Γ_1 和圆 Γ_2 的

根轴.

同理，AD 为圆 Γ_1 和圆 Γ_3 的根轴.

又因

$$BM' = AM' - AB = AA' + F'K - AA' - BB' = C'K' - BB' = CL - BB' - CB' = BL$$

所以，B 到圆 Γ_2 和圆 Γ_3 的圆幂相同.

同理，E 到圆 Γ_2 和圆 Γ_3 的圆幂相同.

所以，BE 为圆 Γ_2 和圆 Γ_3 的根轴.

因此，AD，CF，BE 共点于圆 $\Gamma_i(i=1,2,3)$ 的根心.

故布里昂雄定理得证.

⑱ 已知 $\triangle ABC$ 的 $\angle C$ 内的旁切圆与边 AB 切于点 C'. 设 Z 为由点 C 引出的 $\triangle ABC$ 的高的中点. 证明：$\triangle ABC$ 的内心在直线 $C'Z$ 上.

（2002 ~ 2003 年匈牙利数学奥林匹克）

证明　如图 22，记内心为 I，内切圆切 AB 于 D，D 关于 I 的对称点为 E. 联结 CE 并延长交 AB 于 C''，过 E 作 AB 的平行线分别交 AC，BC 于 F，G. 易知 $\triangle CFG \backsim \triangle CAB$.

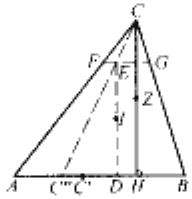


图 22

因为圆 I 是 $\triangle CFG$ 的旁切圆，所以

$$CF + FE = \frac{CF + FG + CG}{2}$$

$$CA + AC'' = \frac{CA + AB + CB}{2}$$

因为

$$CA + AC' = \frac{CA + AB + CB}{2}$$

所以 $C' = C''$，故 C，E，C' 三点共线.

因为 I 为 ED 的中点，Z 为 CH 的中点，且 C'，D，H 三点共线，所以，C'，I，Z 三点共线.

⑲ 如图 23，在 $\triangle ABC$ 的内部有四个半径相等的圆 K_1，圆 K_2，圆 K_3，圆 K_4，其中圆 K_1，圆 K_2，圆 K_3 均与 $\triangle ABC$ 的两条边相切，且与圆 K_4 外切. 证明：$\triangle ABC$ 的内心、外心和 K_4 在一条直线上.

（2003 年德国数学奥林匹克）

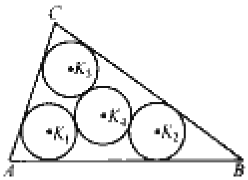


图 23

证明　如图 24，设 $\triangle ABC$ 的内心为 I，外心为 O. 联结 AI，BI，CI，K_1K_2，K_2K_3，K_3K_1，K_4K_1，K_4K_2，K_4K_3.

因为 $\triangle ABC$ 的三边与圆 K_1，圆 K_2，圆 K_3 相切，所以，K_1 在 AI

上，K_2 在 BI 上，K_3 在 CI 上.

设圆半径为 r. 因为 AB 是圆 K_1 和圆 K_2 的公切线，且圆 K_1 和圆 K_2 是等圆，所以，K_1，K_2 到 AB 的距离都是 r.

故 $K_1K_2 \parallel AB$.

同理，$K_1K_3 \parallel AC$，$K_2K_3 \parallel BC$.

所以，$\frac{IK_1}{IA}=\frac{IK_2}{IB}=\frac{IK_3}{IC}$.

故 $\triangle ABC$ 和 $\triangle K_1K_2K_3$ 关于 I 位似.

因为 $K_4K_1=K_4K_2=K_4K_3=2r$，所以，K_4 是 $\triangle K_1K_2K_3$ 的外心.

又 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，所以，I，K_4，O 三点共线.

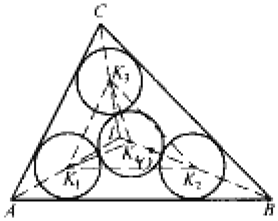


图 24

⑳ 已知圆内接正 $\triangle ABC$，在劣弧 BC 上有一点 P. 若 AP 与 BC 交于点 D，且 $PB=21$，$PC=28$，求 PD.

（2003 年新加坡数学奥林匹克）

解 如图 25，有

$$\triangle ABD \backsim \triangle CPD \Rightarrow \frac{BD}{DP}=\frac{AB}{CP}$$

$$\triangle ACD \backsim \triangle BPD \Rightarrow \frac{DC}{DP}=\frac{AC}{BP}$$

两式相除得 $$\frac{BD}{DC}=\frac{BP}{CP}=\frac{3}{4}$$

故 $$PD=\frac{BD}{AB}\cdot CP=\frac{BD}{BC}\cdot CP=\frac{3}{7}\times 28=12$$

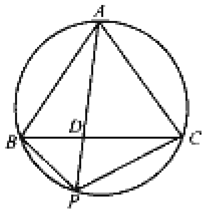


图 25

㉑ 已知凸六边形的对角线 A_1A_4，A_2A_5 和 A_3A_6 交于一点 K，且 $A_2A_1=A_2A_3=A_2K$，$A_4A_3=A_4A_5=A_4K$，$A_6A_5=A_6A_1=A_6K$. 证明：该六边形为圆内接六边形.

（2003 年白俄罗斯数学奥林匹克）

证明 如图 26，考虑四边形 $A_2A_3A_4K$. 由 $A_2A_3=A_2K$，$A_4A_3=A_4K$，得对角线 A_2A_4 垂直平分另一条对角线 A_3K. 因此，A_6A_3 即为 $\triangle A_2A_4A_6$ 的边 A_2A_4 上的高线所在的直线.

从而，K 为 $\triangle A_2A_4A_6$ 的垂心. 由于

$$\angle A_4A_2A_3=\angle A_4A_2A_5=90^\circ-\angle A_2A_4A_6=\angle A_4A_6A_3$$

所以，A_2，A_3，A_4，A_6 四点共圆.

同理可证，A_1，A_5 均在 $\triangle A_2A_4A_6$ 的外接圆上，即六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 为圆内接六边形.

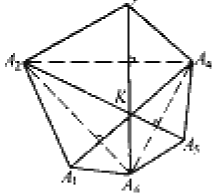


图 26

㉒ 已知圆内接四边形 $ABCD$ 满足 $AB=2AD$，$BC=2CD$，若 $\angle BAD=\alpha$，$AC=d$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

（2003 年白俄罗斯数学奥林匹克）

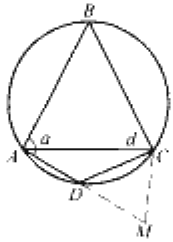


图 27

解 如图 27，延长 AD 至点 M，使得 $DM=AD$.

由于四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形，所以，$\angle CDM=\angle B$. 因为

$$\frac{AB}{BC}=\frac{2AD}{2DC}=\frac{AD}{DC}=\frac{DM}{DC}$$

所以 $$\triangle ABC\backsim\triangle MDC$$

于是，$2CM=AC=d$，且

$$S_{\triangle ABC}=4S_{\triangle MDC}=2S_{\triangle ACM}$$

又因为 $\angle DCM=\angle BCA$，所以

$$\angle ACM=\angle DCB=180^\circ-\alpha$$

于是

$$S_{\triangle ABC}=2S_{\triangle ACM}=AC\cdot CM\cdot\sin\angle ACM=\frac{1}{2}d^2\cdot\sin\alpha$$

㉓ 在锐角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C>\angle B$，点 D 是边 BC 上一点，使得 $\angle ADB$ 是钝角，H 是 $\triangle ABD$ 的垂心，点 F 在 $\triangle ABC$ 内部且在 $\triangle ABD$ 的外接圆圆周上. 如图28所示. 求证：点 F 是 $\triangle ABC$ 的垂心的充要条件是 $HD\,/\!/\,CF$ 且 H 在 $\triangle ABC$ 的外接圆圆周上.

（1999 年中国数学冬令营）

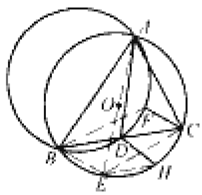


图 28

证明 首先给出一个简单有用的结论：设在 $\triangle UVW$ 中，$\angle UVW$ 和 $\angle VWU$ 均是锐角，则

$$点\ P\ 是\ \triangle UVW\ 的垂心\Leftrightarrow UP\perp VW$$

并且 $$\angle VPW=\pi-\angle VUW$$

下面用此结论证明本题.

1）必要性：已知 $HD\,/\!/\,CF$，而 H 为 $\triangle ABD$ 垂心，则 $DH\perp AB$，所以 $CF\perp AB$，而 H 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上. 因此

$$\angle AFB=\angle ADB=\pi-\angle AHB=\pi-\angle ACB$$

所以，点 F 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

2）充分性：因为 F 是 $\triangle ABC$ 的垂心，所以 $CF\perp AB$，而 $DH\perp AB$，所以 $HD\,/\!/\,CF$，且有

$$\angle ACB=\pi-\angle AFB=\pi-\angle ADB=\angle AHB$$

所以，A,B,C,H 共圆.

由 1),2) 可证本题结论成立.

本题结论可加强为:F 是 $\triangle ABC$ 垂心的充要条件是 $HD \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} CF$ 且 H 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

证明　必要性的证明没有变化,只须证明充分性.设 $\triangle ABC$ 外接圆为圆 O,联结 AO 并延长交圆 O 于 E,联结 BE、CE,EH,BF,则 $BE \perp AB$,$EH \perp AH$,$EC \perp AC$.而 $CF \perp AB$,$BD \perp AH$,$BF \perp AC$,$HD \perp AB$.所以 $BE \parallel CF \parallel DH$,$CE \parallel BF$,$BD \parallel EH$,所以 $BECF$,$BEHD$ 均为平行四边形,所以 $BE \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} DH \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} CF$,由原题的充分性证明知 H 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上,所以加强命题的充分性成立,所以加强命题成立.

> (24) 某圆分别与凸四边形 $ABCD$ 的 AB、BC 两边相切于 G、H 两点,与对角线 AC 相交于 E,F 两点.问 $ABCD$ 应满足怎样的充要条件,使得存在另一圆过 E、F 两点,且分别与 DA,DC 的延长线相切?证明你的结论.
>
> (第 40 届国际数学奥林匹克中国国家队选拔赛试题)

证明　所求的充分必要条件是

$$AB + AD = CB + CD$$

1) 必要性:如图 29,设过 E,F 两点的另一圆分别与 DA 延长线和 DC 延长线相切于 J 和 K 两点.则有

$$AB + AD = BG + GA + AD$$

又 $AG = AJ$,$CH = CK$,$BG = BH$,$DJ = DK$.有

$$\begin{aligned}AB + AD &= BG + GA + AD = \\ &BG + JA + AD = \\ &BG + JD = BH + KD = \\ &BH + KC + CD = BH + HC + CD = CB + CD\end{aligned}$$

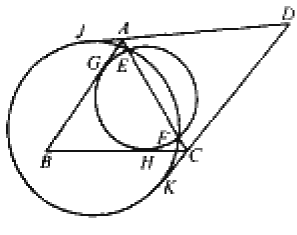


图 29

2) 充分性:设凸四边形 $ABCD$ 满足条件

$$AB + AD = CB + CD$$

在 DA 延长线和 DC 延长线上分别取点 J 和点 K,使得 $AJ = AG$,$CK = CH$.于是

$$\begin{aligned}DJ &= JA + AD = AG + AD = AB + AD - BG = \\ &CB + CD - BH = CH + CD = DK\end{aligned}$$

过点 J 和点 K 分别作 DJ 和 DK 的垂线,以两垂线交点为圆心作通过点 J 和点 K 的圆.

因为 $AJ = AG$,$CK = CH$,所以点 A 和点 C 关于原有圆的幂分别等于这两点关于所作圆的幂.

因为直线 AC 与原有圆相交于 E 和 F 两点.所以 EF 是两圆的公共弦(直线 AC 是两圆的根轴).

至此,我们证明了所作的与 DA 延长线和 DC 延长线相切的圆通过 E,F 两点.

㉕ 如图 30,在锐角 $\triangle ABC$ 的 BC 边上有两点 E,F,满足 $\angle BAE = \angle CAF$,作 $FM \perp AB$,$FN \perp AC$(M,N 是垂足),延长 AE 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于点 D. 证明:四边形 $AMDN$ 与 $\triangle ABC$ 的面积相等.

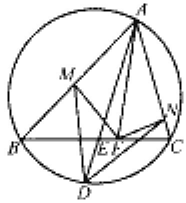


图 30

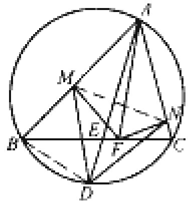


图 31

证法 1 联结 MN,BD,如图 31 所示.

因为 $FM \perp AB$,$FN \perp AC$,所以 A,M,F,N 四点共圆,所以 $\angle AMN = \angle AFN$,则

$$\angle AMN + \angle BAE = \angle AFN + \angle CAF = 90^\circ$$

即 $MN \perp AD$,所以

$$S_{四边形AMDN} = \frac{1}{2}AD \cdot MN$$

因为 $\angle CAF = \angle DAB$,$\angle ACF = \angle ADB$,所以 $\triangle AFC \backsim \triangle ABD$. 则有 $\frac{AF}{AB} = \frac{AC}{AD}$,即 $AB \cdot AC = AD \cdot AF$.

又 AF 是过 A,M,F,N 四点圆的直径,所以 $\frac{MN}{\sin\angle BAC} = AF$,则 $MN = AF \cdot \sin\angle BAC$. 于是

$$S_{四边形AMDN} = \frac{1}{2}AD \cdot MN = \frac{1}{2}AD \cdot AF \cdot \sin\angle BAC =$$
$$\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\angle BAC = S_{\triangle ABC}$$

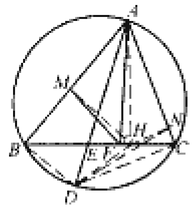


图 32

证法 2 如图32,作 $AH \perp BC$ 于 H,联结 MH,NH,DH,DB,DC,DN,显然 A,M,F,H,N 五点共圆. 所以

$$\angle MHB = \angle MAF = \angle BAE + \angle EAF =$$
$$\angle CAF + \angle EAF = \angle CAE = \angle CBD$$

所以 $MN \parallel BD$,从而 $S_{\triangle BMH} = S_{\triangle DHM}$,如图 32 所示.

同理 $\angle CHN = \angle CAF = \angle BAE = \angle BCD$,故 $NH \parallel DC$,所以 $S_{\triangle CHN} = S_{\triangle DNH}$,于是

$$S_{四边形AMHN} + S_{\triangle BMH} + S_{\triangle CHN} = S_{四边形AMHN} + S_{\triangle DHM} + S_{\triangle DNH}$$

即
$$S_{\triangle ABC} = S_{四边形AMDN}$$

证法 3 设 $\angle BAD = \angle CAF = \alpha$,$\angle DAF = \beta$,则

$$S_{四边形AMDN} = \frac{1}{2}[AM \cdot AD \cdot \sin\alpha + AN \cdot AD \cdot \sin(\alpha + \beta)] =$$
$$\frac{1}{2}[AF \cdot \cos(\alpha + \beta) \cdot AD \cdot \sin\alpha + AF \cdot \cos\alpha \cdot AD \cdot$$
$$\sin(\alpha + \beta)] =$$

$$\frac{1}{2}AF\cdot AD\cdot\sin(\alpha+\alpha+\beta)=\frac{1}{2}AF\cdot AD\cdot\sin A$$

因为 $\angle BAD=\angle FAC$，$\angle ADB=\angle ACF$，所以 $\triangle ABD\backsim\triangle AFC$，则 $\frac{AB}{AF}=\frac{AD}{AC}$，即 $AF\cdot AD=AB\cdot AC$，从而

$$S_{四边形AMDN}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin A=S_{\triangle ABC}$$

㉖ 设 a,b,c 为 $\triangle ABC$ 的三条边，$a\leqslant b\leqslant c$，R 和 r 分别为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径和内切圆半径，令 $f=a+b-2R-2r$，试用 $\angle C$ 的大小来判定 f 的符号.

（2000 年中国数学冬令营）

解　用 A,B,C 分别表示 $\triangle ABC$ 的三个内角，熟知

$$a=2R\cdot\sin A,b=2R\cdot\sin B$$

$$r=4R\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$$

于是

$$f=2R\left(\sin A+\sin B-1-4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\right)=$$
$$2R\left[2\sin\frac{B+A}{2}\cdot\cos\frac{B-A}{2}-1+\right.$$
$$\left.2\left(\cos\frac{B+A}{2}-\cos\frac{B-A}{2}\right)\sin\frac{C}{2}\right]=$$
$$4R\cdot\cos\frac{B-A}{2}\left(\sin\frac{B+A}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)-$$
$$2R+4R\cdot\cos\frac{\pi-C}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=$$
$$4R\cdot\cos\frac{B-A}{2}\left(\sin\frac{\pi-C}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)-2R+4R\cdot\sin^2\frac{C}{2}=$$
$$4R\cdot\cos\frac{B-A}{2}\left(\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)-2R\left(\cos^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right)=$$
$$2R\left(\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)\left(2\cos\frac{B-A}{2}-\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)$$

因 $A\leqslant B\leqslant C$，所以

$$0\leqslant B-A\leqslant B\leqslant C$$

又 $0\leqslant B-A<B+C$，因此

$$\cos\frac{B-A}{2}>\cos\frac{C}{2}$$

$$\cos\frac{B-A}{2}>\cos\frac{B+A}{2}=\cos\frac{\pi-C}{2}=\sin\frac{C}{2}$$

所以 $$2\cos\frac{B-A}{2}>\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}$$

则
$$f > 0 \Leftrightarrow \cos\frac{C}{2} > \sin\frac{C}{2} \Leftrightarrow C > \frac{\pi}{2}$$
$$f = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{C}{2} = \sin\frac{C}{2} \Leftrightarrow C = \frac{\pi}{2}$$
$$f < 0 \Leftrightarrow \cos\frac{C}{2} > \sin\frac{C}{2} \Leftrightarrow C > \frac{\pi}{2}$$

(21) 如图33,在 $\triangle ABC$ 中,$AB = AC$,线段 AB 上有一点 D,线段 AC 的延长线上有一点 E,使得 $DE = AC$;线段 DE 与 $\triangle ABC$ 外接圆交于点 T,P 是线段 AT 的延长线上的一点.证明:点 P 满足 $PD + PE = AT$ 的充分必要条件是点 P 在 $\triangle ADE$ 的外接圆上.

(第41届国际数学奥林匹克中国国家队选拔赛试题)

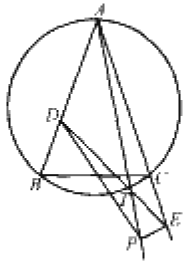


图 33

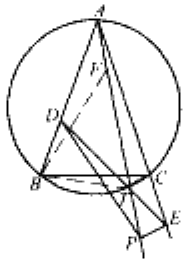


图 34

证明 充分性证法1:如图34,在线段 AT 上取一点 F,使得 $\angle ABF = \angle EDP$.

因为 P 在 $\triangle ADE$ 的外接圆上,所以有 $\angle BAF = \angle DAP = \angle DEP$.又 $AB = AC = DE$,故 $\triangle ABF \cong \triangle EDP$.于是,$BF = PD$,$AF = PE$.

联结 BT,由 A,B,C,T 四点共圆和 A,D,E,P 四点共圆得 $\angle CBT = \angle CAT = \angle EDP = \angle ABF$.在 $\triangle BET$ 中,$\angle FBT = \angle FBC + \angle CBT = \angle FBC + \angle ABF = \angle ABC$,而 $\angle FTB = \angle ACB$,又根据 $AB = AC$,可得 $\angle ABC = \angle ACB$.故 $\angle FBT = \angle FTB$,即 $\triangle BFT$ 是等腰三角形,$BF = FT$.从而
$$AT = AF + FT = PE + BF = PE + PD$$

充分性证法2:联结 BT,CT.在 $\triangle BTC$ 和 $\triangle DPE$ 中,由 A,B,C,T 四点共圆和 A,D,E,P 四点共圆可得
$$\angle CBT = \angle CAT = \angle EDP,\angle BCT = \angle BAT = \angle DEP$$
于是,$\triangle BTC \backsim \triangle DPE$.从而,可设
$$\frac{DP}{BT} = \frac{PE}{CT} = \frac{DE}{BC} = k$$

对四边形 $ABTC$ 应用托勒密定理,有
$$AC \cdot BT + AB \cdot CT = BC \cdot AT$$
将上式两端同乘以 k,并用前一比例式代入可得
$$AC \cdot DP + AB \cdot PE = DE \cdot AT$$
注意到 $AB = AC = DE$,此式即 $PD + PE = AT$.

必要性证法1:以 D,E 为两个焦点,长轴长等于 AT 的椭圆与直线 AT 至多有两个交点,而其中在 DE 的一侧,即线段 AT 延长线的交点至多有一个.由前面充分性的证明知,AT 的延长线与 $\triangle ADE$ 外接圆的交点 Q 在这个椭圆上,故点 P 与点 Q 重合,命题

得证.

必要性证法 2:如图 35,在线段 AT 的延长线上任取两点 P_1,P_2,易见当 $P_1T < P_2T$ 时

$$P_1D + P_1E < P_2D + P_2E$$

于是,在线段 AT 延长线上满足 $PD + PE = AT$ 的点 P 至多有一个.而由充分性的证明知 $\triangle ADE$ 的外接圆与 AT 延长线的交点即满足上述等式.故点 P 就在 $\triangle ADE$ 的外接圆上.

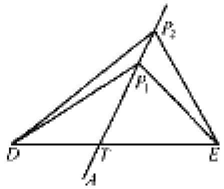


图 35

㉘ 设 A,B,C,D 是圆周上依顺时针方向排布的四点,满足 $AB < AD,BC > CD$.$\angle BAD$ 的平分线交圆周于点 X,$\angle BCD$ 的平分线交圆周于点 Y.考虑圆周上这六点组成的六边形.如果六边形六条边中的四条长度相等,证明 BD 是圆的直径.

(2004 年加拿大数学奥林匹克)

证明 如图 36,因为 CY 平分 $\angle BCD$,所以 $BY = YD$.又 $AB < AD$,所以 Y 在 D 和 A 之间,且 $DY > YA$,$DY > AB$.同理可知 X 在 B 和 C 之间,且 $BX > XC$,$BX > CD$.所以如果 $ABXCDY$ 有四条边相等,那么必定是 $YA = AB = XC = CD$.即从 Y 到 B 的弧等于从 X 到 D 的弧,所以 $YB = XD$.因为 AX 和 CY 分别是 $\angle BAD$ 和 $\angle BCD$ 的角平分线,所以 $DY = YB$,$BX = XD$.因此四边形 $BXDY$ 是正方形,BD 必定是直径.

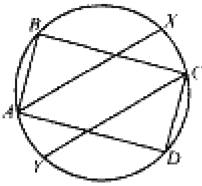


图 36

㉙ 圆 Γ_1 和圆 Γ_2 相交于点 M 和 N,设 l 是圆 Γ_1 和圆 Γ_2 的两条公切线中距离 M 较近的那条公切线,l 与圆 Γ_1 相切于点 A,与圆 Γ_2 相切于点 B,设经过点 M 且与 l 平行的直线与圆 Γ_1 还相交于点 C,与圆 Γ_2 还相交于点 D,直线 CA 和 DB 相交于点 E,直线 AN 和 CD 相交于点 P,直线 BN 和 CD 相交于点 Q,证明:$EP = EQ$.

(第 41 届国际数学奥林匹克)

证明 设 K 为 MN 与 AB 交点,如图 37 所示,联结 EM,因为 $CD /\!/ AB$,则 A 是 $\overset{\frown}{CM}$ 中点,B 是 $\overset{\frown}{MD}$ 中点,于是,$\triangle ACM$ 和 $\triangle BMD$ 为等腰三角形,则有

$$\angle BAM = \angle AMC = \angle ACM = \angle EAB$$

$$\angle ABM = \angle BMD = \angle BDM = \angle EBA$$

故 $EM \perp AB$,因为 $AB /\!/ CD$,则 $EM \perp PQ$,而

$$AK^2 = KN \cdot KM = BK^2$$

可得 $AK = KB$,则 K 为 AB 中点,则 M 为 PQ 中点,又已证 $EM \perp$

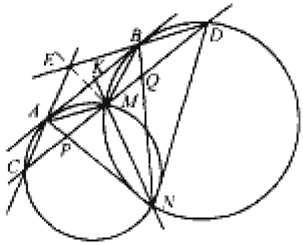


图 37

PQ，则 $EQ = EP$ 即证.

㉚ 设 AH_1, BH_2, CH_3 是锐角 $\triangle ABC$ 的三条高线，$\triangle ABC$ 的内切圆与边 BC, CA, AB 分别相结切于点 T_1, T_2, T_3，设直线 l_1, l_2, l_3 分别是直线 H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 关于直线 T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2 的对称直线，证明：l_1, l_2, l_3 所确定的三角形，其顶点都在 $\triangle ABC$ 的内切圆上.

（第 41 届国际数学奥林匹克）

证明 令 u_1 为 T_1 关于 $\angle A$ 的平分线的对称点，M_2 为 T_2 关于 $\angle B$ 的平分线的对称点，M_3 为 T_3 关于 $\angle C$ 的平分线的对称点，设 I 为 $\triangle ABC$ 内心，注意 T_2 和 H_2 总在 BI 的同一侧，且 T_2 与 H_2 距离 BI 更近，如图 38 所示，我们只考虑点 C 也在 BI 同一侧情形（如果 C 和 T_2, H_2 分别位于 BI 的两侧，证明需要稍加改动）.

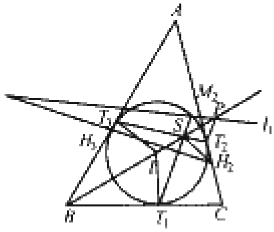


图 38

设 $\angle A = 2\alpha, \angle B = 2\beta, \angle C = 2r$.

先证明一个引理：H_2 关于 T_2T_3 的对称点位于直线 BI 上.

引理的证明：过 H_2 作直线 l 与 T_2T_3 垂直，记 P 为 l 与 BI 的交点，S 为 BI 与 T_2T_3 的交点，则 S 既在线段 BP 上，也在线段 T_2T_3 上，只须证明 $\angle PSH_2 = 2\angle PST_2$.

首先，我们有 $\angle PST_2 = \angle BST_3$，又由外角定理知

$$\angle PST_2 = \angle AT_3S - \angle T_3BS = (90^\circ - \alpha) - \beta = r$$

再由关于 BI 的对称性知

$$\angle BST_1 = \angle BST_3 = \gamma$$

因为

$$\angle BT_1S = 90^\circ + \alpha > 90^\circ$$

所以点 C 和点 S 在 IT_1 同一侧.

由 $\angle IST_1 = \angle ICT_1 = r$ 可得 S, T_1, C, I 四点共圆，于是

$$\angle ISC = \angle IT_1C = 90^\circ$$

因为 $\angle BH_2C = 90^\circ$，所以 B, C, H_2, S 四点共圆. 这意味着

$$\angle PSH_2 = \angle C = 2r = 2\angle PST_2$$

引理得证.

注意到在引理的证明中，因为 B, C, H_2, S 四点共圆以及关于 T_2T_3 的对称性，可以得到

$$\angle BPT_2 = \angle SH_2T_2 = \beta$$

又由于 M_2 是 T_2 关于 BI 的对称象，有

$$\angle BPM_2 = \angle BPT_2 = \beta = \angle CBP$$

因此，$PM_2 \parallel BC$.

要证明 M_2 位于 l_1 上，只须证 l_1 也平行于 BC.

假设 $\beta \neq \gamma$，设直线 BC 与 H_2H_3 和 T_2T_3 分别相交于点 D 和

点 E，注意到点 D 和点 E 位于直线 BC 上线段 BC 的同一侧，易证

$$\angle BDH_3 = 2|\beta-\gamma|, \angle BET_3 = |\beta-\gamma|$$

故 $l_1 /\!/ BC$，则 M_2 位于 l_1 上，则 l_1, l_2, l_3 所确定的三角形为 $\triangle M_1M_2M_3$。而 $\triangle M_1M_2M_3$ 在 $\triangle ABC$ 内切圆上，则原命题得证。

㉛ 设锐角 $\triangle ABC$ 的外心为 O，从 A 作 BC 的高，垂足为 P，且 $\angle BCA \geqslant \angle ABC + 30°$。证明：$\angle CAB + \angle COP < 90°$。

（第 42 届国际数学奥林匹克）

证明　令 $\alpha = \angle CAB, \beta = \angle ABC, \gamma = \angle BCA, \varphi = \angle COP$。如图 39 所示，设 K, Q 分别为点 A, P 关于 BC 的垂直平分线的对称点，R 为 $\triangle ABC$ 的外接圆半径，则

$$OA = OB = OC = OK = R$$

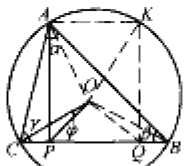


图 39

由于 $KQPA$ 为矩形，则 $QP = KA$，及

$$\angle AOK = \angle AOB - \angle KOB = \angle AOB - \angle AOC = 2\gamma - 2\beta \geqslant 60°$$

由此及 $OA = OK = R$，导出 $KA \geqslant R, PQ \geqslant R$。

在 $\triangle ABC$ 中

$$OP + R = OQ + OC > QC = QP + PC \geqslant R + PC$$

因此，$OP > PC$。

在 $\triangle COP$ 中，$\angle PCO > \varphi$。由

$$\alpha = \frac{1}{2}\angle BOC = \frac{1}{2}(180° - 2\angle PCO) = 90° - \angle PCO$$

得
$$\alpha + \varphi < 90°$$

即
$$\angle CAB + \angle COP < 90°$$

㉜ 圆 O_1 和圆 O_2 相交于 B, C 两点，且 BC 是圆 O_1 的直径。过点 C 作圆 O_1 的切线，交圆 O_2 于另一点 A，联结 AB，交圆 O_1 于另一点 E，联结 CE 并延长，交圆 O_2 于点 F。设点 H 为线段 AF 上的任意一点，联结 HE 并延长，交圆 O_1 于点 G，联结 BG 并延长，与 AC 的延长线交于点 D，求证：$\frac{AH}{HF} = \frac{AC}{CD}$。

（2002 年中国女子数学奥林匹克）

分析　欲证 $\frac{AH}{HF} = \frac{AC}{CD}$，只须证 $\frac{AH}{AF} = \frac{AC}{AD}$，即

$$AH \cdot AD = AC \cdot AF$$

先设法证明 $\triangle AHE \backsim \triangle ABD$，再结合切割线定理便能证明。

证明　因为 BC 是圆 O_1 的直径，ACD 是切线，所以 $BC \perp AD$，$\angle ACB = 90°$，于是 AB 是圆 O_2 的直径。如图 40 所示。又 $\angle BEC =$

$90°$，即 $AB \perp FC$，所以 $\angle FAB = \angle CAB$。

联结 CG，则 $CG \perp BD$，于是

$$\angle ADB = \angle BCG = \angle BEG = \angle AEH$$

所以 $$\triangle AHE \backsim \triangle ABD$$

从而 $$\frac{AH}{AE} = \frac{AB}{AD}$$

即 $$AH \cdot AD = AB \cdot AE$$

由切割线定理可得 $$AC^2 = AE \cdot AB$$

所以 $$AH \cdot AD = AC^2 = AC \cdot AF$$

$$\frac{AH}{AF} = \frac{AC}{AD}$$

可得 $$\frac{AH}{HF} = \frac{AC}{CD}$$

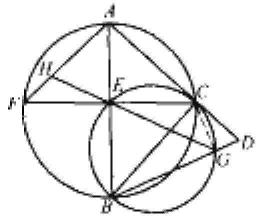


图 40

33 设 O 为锐角 $\triangle ABC$ 的外心，P 为 $\triangle AOB$ 内部一点，P 在 $\triangle ABC$ 的三边 BC，CA，AB 上的射影为 D，E，F。求证：以 FE，FD 为邻边的平行四边形位于 $\triangle ABC$ 内。

（2002 年中国西部数学奥林匹克）

证明 如图 41，以 FE、FD 为邻边作平行四边形 $DFEG$。欲证命题成立，我们只须证明 $\angle FEG < \angle FEC$，且 $\angle FDG < FDC$。这等价于证明 $\angle BFD < \angle BAC$，且 $\angle AFE < \angle ABC$。

事实上，过 O 作 $OH \perp BC$，H 为垂足。由 $PD \perp BC$，$PF \perp AB$，知 B，F，P，D 四点共圆，故 $\angle BFD = \angle BPD$。而 $\angle PBD > \angle OBH$，于是 $90° - \angle PBD < 90° - \angle OBH$，即 $\angle BPD < \angle BOH$。又 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，故

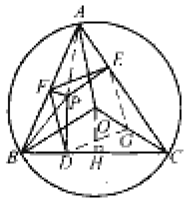


图 41

$$\angle BOH = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BAC$$

所以 $$\angle BFD = \angle BPD < \angle BOH = \angle BAC$$

即 $\angle BFD < \angle BAC$。

同理可证 $\angle AFE < \angle ABC$，所以命题成立。

注 *如果 O 不是 $\triangle ABC$ 的外心，而是内心或者垂心，题中的结论是否成立呢？请读者思考。*

34 设 D 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上一点，但不是其中点。设 O_1 和 O_2 分别是 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ADC$ 的外心。求证：$\triangle ABC$ 的中线 AK 的垂直平分线过线段 O_1O_2 的中点。

（2003 年中国国家集训队训练题）

证法1　如图42，设 O_1O_2 中点为 O，联结 AO_1,AO_2,AO；KO_1,KO_2,KO；BO_1,BO_2；CO_1,CO_2，则

$$KO_1^2=\frac{1}{2}(BO_1^2+CO_1^2-2BK^2)=$$
$$\frac{1}{2}[BO_1^2+(CD\cdot CB+AO_1^2)-2BK^2]=$$
$$AO_1^2+\frac{1}{2}(CD\cdot CB-\frac{1}{2}BC^2)$$

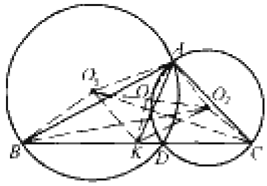


图42

同理　$$KO_2^2=AO_2^2+\frac{1}{2}(BD\cdot BC-\frac{1}{2}BC^2)$$

两式相加得　$$AO_1^2+AO_2^2=KO_1^2+KO_2^2$$

所以　$$AO^2=\frac{1}{2}(AO_1^2+AO_2^2-2OO_1^2)=$$
$$\frac{1}{2}(KO_1^2+KO_2^2-2OO_1^2)=KO^2$$

故 $AO=KO$，即 AK 的垂直平分线过 O_1O_2 的中点 O，证毕．

证法2　如图43，设 O_1O_2 的中点为 E．作 $EP\perp BC$ 于 P，$O_1M\perp BC$ 于 M，$O_2N\perp BC$ 于 N．只须证明 $AE=EK$（则点 E 在 AK 的中垂线上）．

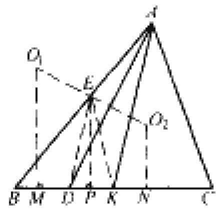


图43

注意到 O_1O_2 为 AD 的中垂线，所以 $AE=ED$．

设 $BD=2a$，$DC=2b$，则

$$MP=\frac{1}{2}MN=\frac{1}{4}BC=\frac{1}{2}(a+b)$$
$$DP=MP-MD=\frac{1}{2}(a+b)-a=\frac{1}{2}(b-a)$$
$$DK=DN-KC+NC=b-(a+b)+b=b-a$$

从而　$$DK=2DP,ED=EK$$

因此 $AE=EK$．所以，命题成立．

> ㉟ 设一个既有外接圆，又有内切圆的凸 n 边形的面积为 B，其外接圆面积为 A，内切圆面积为 C．求证：$2B<A+C$．
>
> （2003年中国国家集训队训练题）

证明　如图44，设外接圆半径为 R，内切圆半径为 r，凸 n 边形周长为 x．

因为凸 n 边形内接于其外接圆，故 $x<2\pi R$，所以

$$B=\frac{1}{2}xr<\pi Rr$$
$$2B<2\pi Rr=\pi 2Rr<\pi(R^2+r^2)=$$
$$\pi R^2+\pi r^2=A+C$$

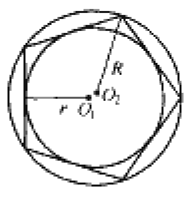


图44

36 设 $C(I)$ 是以 $\triangle ABC$ 的内心 I 为圆心的一个圆，点 D,E,F 分别是从 I 出发垂直于边 BC,CA 和 AB 的直线与 $C(I)$ 的交点. 求证：AD,BE 和 CF 三线共点.

（2003 年中国国家集训队训练题）

证明 如图 45，过 D 作 $DD_1 \perp AC$，D_1 为垂足，过 E 作 $EE_1 \perp BC$，E_1 为垂足，联结 AD,BD,CD,AE,BE,CE，设 AD 与 BC 交于 A_1，BE 交 AC 于 B_1.

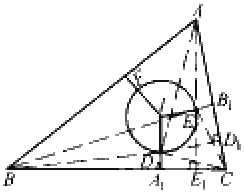


图 45

因为 CI 是 $\angle BCA$ 的平分线且 $ID \perp BC$，$IE \perp AC$，又 $ID = IE$，所以 D,E 关于 CI 对称，又因为 $DD_1 \perp AC$ 于 D_1，$EE_1 \perp BC$ 于 E_1，所以 D_1,E_1 关于 CI 对称，故 $DD_1 = EE_1$.

因为 $S_{\triangle ABE} : S_{\triangle CBE} = AB_1 : CB_1$，所以 $S_{ABCE} : S_{\triangle CBE} = AC : CB_1$，又因为 $S_{\triangle CBE} = \frac{1}{2} BC \cdot EE_1$，所以

$$S_{ABCE} = \frac{AC \cdot BC \cdot EE_1}{2CB_1}$$

同理

$$S_{ABDC} = \frac{AC \cdot BC \cdot DD_1}{2CA_1}$$

所以

$$CA_1 : CB_1 = S_{ABCE} : S_{ABDC}$$

设 $CF \cap AB = C_1$，则同理可得

$$AB_1 : AC_1 = S_{ACBF} : S_{ABCE}$$

$$BC_1 : BA_1 = S_{ABDC} : S_{ACBF}$$

三式相乘得

$$\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$$

由塞瓦定理逆定理得 AA_1,BB_1,CC_1 三线共点，即 AD,BE,CF 三线共点.

37 点 P 为 $\triangle ABC$ 的外接圆上劣弧 BC 内的动点，I_1,I_2 分别是 $\triangle PAB,\triangle PAC$ 的内心. 求证：(1) $\triangle PI_1I_2$ 的外接圆过定点；(2) 以 I_1I_2 为直径的圆过定点；(3) I_1I_2 的中点在定圆上.

（2003 年中国国家集训队训练题）

证明 (1) 如图 46，设 I 为 $\triangle ABC$ 的内心，取 $\triangle ABC$ 的外接圆上优弧 BC 的中点 D，连 DI 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 K，联结 AI，$BI,CI,AI_1,BI_1,CI_1,AI_2,BI_2,CI_2,II_1,II_2,BK,CK,IK,I_1K,I_2K,I_1I_2$. 因为

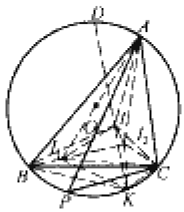


图 46

$$\angle BI_1A = \frac{\pi}{2} + \frac{\angle BPA}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\angle BCA}{2} = \angle BIA$$

所以 B,I_1,I,A 四点共圆. 因此

$$\angle I_1BI=\angle I_1AI=\frac{\angle BAC}{2}-\angle BAI_1=$$
$$\frac{1}{2}(\angle BAC-\angle BAP)=\frac{\angle CAP}{2}=\angle CAI_2$$

同理 $\angle BII_1=\angle ICI_2$, 所以 $\triangle BI_1I\backsim\triangle II_2C$.

因为 D 为 $\overset{\frown}{BC}$ 中点, 所以

$$\angle BKD=\angle CKD=\frac{\pi-\angle BAC}{2}$$

又 $$\angle KBI+\angle KIB=\pi-\angle BKI=\frac{\pi+\angle BAC}{2}=$$
$$\angle BIC=\angle BIK+\angle KIC$$

所以 $\angle KBI=\angle KIC$.

同理 $\angle KIB=\angle KCI$, 所以 $\triangle BIK\backsim\triangle ICK$, 因此 I_1,I_2 为 $\triangle BIK$ 与 $\triangle ICK$ 中的一组对应点, $\triangle I_1KI_2\backsim\triangle BKI$, 所以

$$\angle I_1KI_2=\angle BKI=\frac{\pi-\angle BAC}{2}$$

而 $$\angle I_1PI_2=\frac{\angle BPC}{2}=\frac{\pi-\angle BAC}{2}$$

所以 I_1,I_2,K,P 四点共圆, 因此 $\triangle PI_1I_2$ 的外接圆过定点 K. 证毕.

(2) 如图 47, 由 $\triangle BI_1I\backsim\triangle II_2C$ 知

$$\angle BII_1+\angle CII_2=\angle BII_1+\angle I_1BI=$$
$$\pi-\angle BI_1I=\angle BAI=\frac{1}{2}\angle BAC$$

所以 $$\angle I_1II_2=\angle BIC-(\angle BII_1+\angle CII_2)=$$
$$\frac{\pi+\angle BAC}{2}-\frac{\angle BAC}{2}=\frac{\pi}{2}$$

因此, 以 I_1I_2 为直径的圆过定点 I, 证毕.

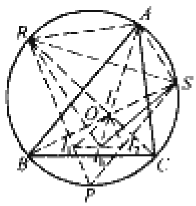


图 47

(3) 如图 47, 记 I_1I_2 的中点为 I_0, 作劣弧 AB 及 AC 的中点 R, S, 联结 $IR,IS,I_1R,I_0S,I_2S,I_0R,I_0S,AR,AS,AI,RS,II_1,II_2$. 因为

$$\angle RAI=\angle RAB+\angle BAI=\frac{\angle BCA}{2}+\frac{\angle BAC}{2}=\frac{\pi-\angle ABC}{2}$$

所以 $$\angle RIA=\pi-\angle ARC-\angle RAI=\pi-\angle ABC-$$
$$\frac{\pi-\angle ABC}{2}=\frac{\pi-\angle ABC}{2}=\angle RAI$$
$$RA=RI$$

同理 $RA=RI_1$, 因此 $RI=RI_1$.

由(2)的结论知 $II_1\perp II_2$, 所以 $II_0=I_1I_0$. 又 $RI_0=RI_0$, 故 $\triangle RI_0I_1\cong\triangle RI_0I$, 所以

$$\angle I_0RI = \frac{1}{2}\angle I_1RI = \frac{1}{2}\widehat{PC}$$

同理 $$\angle I_0SI = \frac{1}{2}\widehat{BP}$$

又 $$\angle IRS + \angle ISR = \frac{1}{2}\widehat{AC} + \frac{1}{2}\widehat{BA}$$

所以 $$\angle I_0RS + \angle I_0SR = \frac{1}{2}(\widehat{AC} + \widehat{BA} + \widehat{BP} + \widehat{PC}) = \frac{\pi}{2}$$

因此 $RI_0 \perp SI_0$，即 I_0 在以 SR 为直径的定圆上.

(38) $\triangle ABC$ 的角 A,B,C 的内角平分线分别交该三角形外接圆于点 K,L,M. R 为边 AB 上任意一点，点 P,R,Q 满足 $RP \parallel AK$，$BP \perp BL$，$RQ \parallel BL$，$AQ \perp AK$. 求证：KP，LQ 和 MR 三线共点.

（2003 年中国国家集训队训练题）

证明 如图 48，设直线 AQ 与 BL 交于 S，LQ 与 MR 交于 T，记 $\triangle ABC$ 内心为 I，联结 AL，AM，BM. 因为

$$\angle IAL = \angle CAK + \angle CAL = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = \angle BAK + \angle ABL = \angle AIL$$

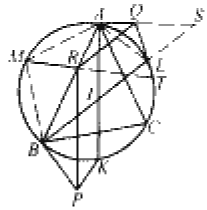


图 48

又 $AS \perp AI$，所以 AL 为 $\text{Rt}\triangle IAS$ 斜边上的中线，得 $LI = LA = LS$，因此 $\triangle ALS$ 为等腰三角形.

又 $\triangle AMB$ 为等腰三角形且 $\angle ALS = \angle AMB$，因此 $\triangle ALS \backsim \triangle AMB$，所以 $\angle MAB = \angle LAS$ 且 $\frac{AM}{AB} = \frac{AL}{AS}$.

又因为 $RQ \parallel BS$，故 $\frac{AR}{AQ} = \frac{AB}{AS} = \frac{AM}{AL}$，所以 $\triangle AMR \backsim \triangle ALQ$，$\angle AMR = \angle ALQ$.

若 T 与 L 是同一点，则 T 已在 $\triangle ABC$ 外接圆上；若 T 与 L 不是同一点，则无论 T 在线段 LQ 上还是 LQ 外，均可由 $\angle ALQ = \angle AMR$ 得出 A,L,T,M 四点共圆，即 T 在 $\triangle ABC$ 外接圆上，因此无论怎样，T 都在 $\triangle ABC$ 外接圆上，所以 QL 与 MR 交于 $\triangle ABC$ 外接圆上一个不同于 M 的点. 同理 PK 与 MR 也交于 $\triangle ABC$ 外接圆上一个不同于 M 的点. 又 $\triangle ABC$ 的外接圆与直线 MR 除 M 外的交点至多一个，故 QL，PK 与 MR 三线共点.

39 过锐角 $\triangle ABC$ 的顶点 A,B 作该三角形的外接圆的切线，他们分别与过点 C 的该三角形的外接圆的切线交于点 D,E，直线 AE 交 BC 于点 P，直线 BD 交 AC 于 R. 设 Q 为 AP 的中点，S 为 BR 中点. 求证：$\angle ABQ=\angle BAS$.

（2003 年中国国家集训队训练题）

证明 设 AE 与 $\triangle ABC$ 外接圆交于点 K，联结 BK,CK. 设 $\triangle ABC$ 三边长为 $AB=c,BC=a,CA=b$，外接圆半径为 r.

如图 49，由弦切角定理，可推出 $\triangle EBK\backsim\triangle EAB$，因此

$$\frac{BK}{AB}=\frac{BE}{AE}$$

同理
$$\frac{CK}{AC}=\frac{CE}{AE}=\frac{BE}{AE}=\frac{BK}{AB}$$

所以
$$\frac{BK}{CK}=\frac{AB}{AC}=\frac{c}{b}$$

因此
$$\frac{\sin\angle BAK}{\sin\angle CAK}=\frac{c}{b}$$

由角分线定理知

$$\frac{BP}{CP}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{\sin\angle BAK}{\sin\angle CAK}=\frac{c^2}{b^2}$$

所以
$$BP=\frac{c^2}{c^2+b^2}\cdot a=\frac{ac^2}{c^2+b^2}$$

再由角分线定理知

$$\frac{AQ}{PQ}=\frac{AB}{BP}\cdot\frac{\sin\angle ABQ}{\sin\angle PBQ}$$

而 Q 为 AP 的中点，$AQ=PQ$. 所以

$$\frac{\sin\angle PBQ}{\sin\angle ABQ}=\frac{AB}{BP}=\frac{c}{\frac{ac^2}{c^2+b^2}}=\frac{c^2+b^2}{ac}$$

即
$$\frac{\sin(\angle B-\angle ABQ)}{\sin\angle ABQ}=\frac{c^2+b^2}{ac}$$

从而
$$\sin B\cdot\cot\angle ABQ-\cos B=\frac{c^2+b^2}{ac}$$

$$\sin B\cdot\cot\angle ABQ=\frac{c^2+b^2}{ac}+\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+b^2+3c^2}{2ac}$$

$$\cot\angle ABQ=\frac{2r(a^2+b^2+3c^2)}{2abc}=\frac{r(a^2+b^2+3c^2)}{abc}$$

同理
$$\cot\angle BAS=\frac{r(b^2+a^2+3c^2)}{bac}=\cot\angle ABQ$$

利用 $0<\angle BAS,\angle ABQ<\pi$，可知 $\angle BAS=\angle ABQ$，证毕.

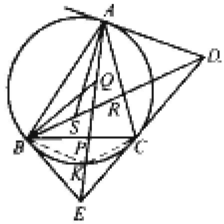


图 49

④⑩ 平面上两个圆交于点 A,B. 设 PQ 为它们的一条公切线,P,Q 为切点. S 为过点 P,Q 所作的 $\triangle APQ$ 的外接圆的切线的交点. H 是 B 关于 PQ 的对称点. 求证:A,S,H 三点共线.

(2003 年中国国家集训队训练题)

证明 先证明一个引理:过圆 O 外一点 P 作切线 PA,PB 及割线 PCD,记 AB 中点为 M,则 $\triangle DAC \backsim \triangle DMB \backsim \triangle BMC$.

引理的证明:由弦切角定理易知 $\triangle PAC \backsim \triangle PDA$,故 $\frac{AC}{AD} = \frac{PC}{PA}$,同理

$$\frac{BC}{BD} = \frac{PC}{PB} = \frac{PC}{PA} = \frac{AC}{AD}$$

所以

$$AC \cdot BD = BC \cdot AD$$

由托勒密定理知

$$AB \cdot CD = AC \cdot BD + BC \cdot AD = 2AC \cdot BD$$

所以

$$BM \cdot CD = AC \cdot BD$$

$$\frac{BM}{BD} = \frac{AC}{CD}$$

又 $\angle ACD = \angle MBD$,所以 $\triangle DAC \backsim \triangle DMB$.

同理由 $AD \cdot BC = CD \cdot BM$ 以及 $\angle ADC = \angle MBC$ 可证明 $\triangle DAC \backsim \triangle BMC$.

所以 $\triangle DAC \backsim \triangle DMB \backsim \triangle BMC$,引理得证.

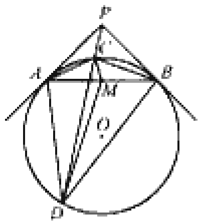


图 50

从图 50 还可知,由于 $2\angle ADB = \angle PAB + \angle PBA < \pi$,故 $\angle ADB < \frac{\pi}{2}$,所以 $\angle ACB > \frac{\pi}{2}$,即当 $\angle ACB > \frac{\pi}{2}$ 时,P,C 在 AB 同侧,当 $\angle ACB < \frac{\pi}{2}$ 时,P,C 在 AB 两侧.

回到原题,我们只证明 A 比 B 离 PQ 远的情况,另一情况类似可证.

如图 51,延长 AB 交 PQ 于 M,联结 AS 交 $\triangle APQ$ 的外接圆于 K.

因为

$$\angle PAQ = \angle PAB + \angle QAB = \angle BPQ + \angle BQP = \pi - \angle PBQ$$

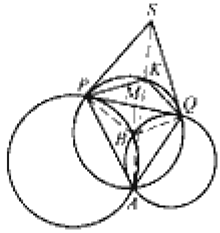


图 51

又因 $\angle PAQ < \angle PBQ$,所以 $\angle PAQ < \frac{\pi}{2}$,因此点 S 应像图 51 所示的那样,与 A,B 在 PQ 两侧.

由切割线定理,$MP^2 = MB \cdot MA = MQ^2$,故 M 为 PQ 之中点,由引理知 $\triangle APK \backsim \triangle AMQ$,得 $\angle PAK = \angle MAQ$,故 $\angle PQK = \angle PAK = \angle MAQ = \angle PQB$. 同理 $\angle QPK = \angle QPB$.

又因 $QP = QP$，所以 $\triangle QPK \cong \triangle QPB$，故 K 即为 B 关于 PQ 的对称点 H，从而 A, H, S 共线，证毕.

41 设 $ABCD$ 是一个长方形，T 是过点 A, C 的一个圆的一段弧，T_1 是与边 AD，DC 和弧 T 都相切的一个圆，T_2 是与边 AB，BC 和弧 T 都相切的一个圆. 这里 T_1 和 T_2 全部落在长方形 $ABCD$ 内. 设 T_j 的半径为 r_j，$j = 1, 2$. r 是 $\triangle ABC$ 的内切圆半径. 求证：(1) $r_1 + r_2 = 2r$；(2) T_1 和 T_2 的一条公切线与 AC 平行，且其长度为长方形 $ABCD$ 两边长的差.

（2003 年中国国家集训队训练题）

证明 (1) 如图 52，不妨设 B 在 T 所在的圆内部，D 在其外部，设这个圆圆心为 O，T_1，T_2 的圆心分别为 O_1，O_2，以 BA 为 x 轴正方向建立直角坐标系，原点为大圆圆心 O. 记 R 为圆 O 半径长，设各点坐标分别为 $A(R\cdot\cos\alpha, R\cdot\sin\alpha)$，$C(R\cdot\cos\beta, R\cdot\sin\beta)$，那么，$B(R\cdot\cos\beta, R\cdot\sin\alpha)$，于是由勾股定理得

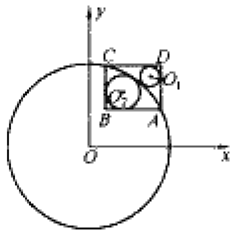


图 52

$$(R\cdot\cos\beta + r_2)^2 + (R\cdot\sin\alpha + r_2)^2 = (R - r_2)^2$$

$$r_2^2 + 2r_2(R\cdot\cos\beta + R\cdot\sin\alpha + R) +$$
$$(R\cdot\cos\beta)^2 + (R\cdot\sin\alpha)^2 - R^2 = 0$$

$r_2 = -(R\cdot\cos\beta + R\cdot\sin\alpha + R) +$

$\sqrt{2R^2 + 2R(R\cdot\cos\beta + R\cdot\sin\alpha) + 2R\cdot\cos\beta\cdot R\cdot\sin\alpha}$

（这里用到 $r_2 > 0$，并由求根公式取正根得到）$=$

$-R(\cos\beta + \sin\alpha + 1) + R\sqrt{2}\sqrt{(1+\cos\beta)(1+\sin\alpha)} =$

$-R(\cos\beta + \sin\alpha + 1) + R\sqrt{2}\cdot$

$\sqrt{(1+\cos\beta)[1+\cos(90^\circ - \alpha)]} =$

$-R(\cos\beta + \sin\alpha + 1) + R\sqrt{2}\cdot 2\cos\dfrac{\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{90^\circ - \alpha}{2}$

同理由于 $D(R\cdot\cos\alpha, R\cdot\sin\beta)$，类似由勾股定理得

$$(R\cdot\cos\alpha - r_1)^2 + (R\cdot\sin\beta - r_1)^2 = (r_1 + R)^2$$

$$r_1^2 - 2r_1(R\cdot\cos\alpha + R\cdot\sin\beta + R) +$$
$$[(R\cdot\cos\alpha)^2 + (R\cdot\sin\beta)^2 - R^2] = 0$$

$2r_1 = (R\cdot\cos\alpha + R\cdot\sin\beta + R) \pm$

$\sqrt{2R^2 + 2R(R\cdot\cos\alpha + R\cdot\sin\beta) + 2R\cdot\cos\alpha\cdot R\cdot\sin\beta}$

但由于 $r_1 < 2r_1 < AD < R\cdot\sin\beta + R$，故根号前取负号，即

$r_1 = (R\cdot\cos\alpha + R\cdot\sin\beta + R) -$

$\sqrt{2R^2 + 2R(R\cdot\cos\alpha + R\cdot\sin\beta) + 2R\cdot\cos\alpha\cdot R\cdot\sin\beta} =$

$R(\cos\alpha + \sin\beta + 1) - R\sqrt{2}\sqrt{(1+\cos\alpha)(1+\sin\beta)} =$

$$R(\cos\alpha+\sin\beta+1)-R\sqrt{2}\sqrt{[1+\cos\alpha][1+\cos(90^\circ-\beta)]}=$$

$$R(\cos\beta+\sin\beta+1)-R\sqrt{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{90^\circ-\beta}{2}$$

所以

$$r_1+r_2=R(\cos\alpha+\sin\beta-\cos\beta-\sin\alpha)-$$

$$2\sqrt{2}R\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{90^\circ-\beta}{2}-\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{90^\circ-\alpha}{2}\right)=$$

$$AB+BC-R\sqrt{2}\left[\left(\cos\frac{90^\circ+\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta-90^\circ}{2}\right)-\left(\cos\frac{90^\circ+\beta-\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta-90^\circ}{2}\right)\right]=$$

$$AB+BC-R\sqrt{2}\left(\cos\frac{90^\circ+\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{90^\circ+\beta-\alpha}{2}\right)=$$

$$AB+BC-R\sqrt{2}\cdot 2\sin 45^\circ\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=$$

$$AB+BC-2R\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}=$$

$$AB+BC-AC(2k\pi<\beta-\alpha<2k\pi+\pi)=2r$$

证毕.

(2) 建立新直角坐标系，如图 53 所示，设 $AB=a$，$BC=b$，$AC=c$，记 $P_1\left(a-r_1-\frac{b}{c}r_1,b-r_1-\frac{a}{c}r_1\right)$，$P_2\left(r_2+\frac{b}{c}r_2,r_2+\frac{a}{c}r_2\right)$，由易知 $P_1\in$ 圆 O_1，$P_2\in$ 圆 O_2，而

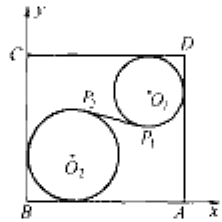


图 53

$$k_{P_1P_2}=\frac{b-r_1-\frac{a}{c}r_1-r_2-\frac{a}{c}r^2}{a-r_1-\frac{b}{c}r_1-r_2-\frac{b}{c}r^2}=\frac{b-\frac{a+c}{c}(a+b-c)}{a-\frac{b+c}{c}(a+b-c)}=$$

$$\frac{bc-(a+c)(a+b-c)}{ac-(b+c)(a+b-c)}=\frac{c^2-a^2-ab}{c^2-b^2-ab}=$$

$$\frac{b(b-a)}{a(a-b)}=-\frac{b}{a}$$

$$k_{O_1P_1}=\frac{b-r_1-\left(b-r_1-\frac{a}{c}r_1\right)}{a-r_1-\left(a-r_1-\frac{b}{c}r_1\right)}=\frac{a}{b}$$

$$k_{O_2P_2}=\frac{r_2+\frac{a}{c}r_2-r_2}{r_2+\frac{b}{c}r_2-r_2}=\frac{a}{b}$$

$$k_{AC}=\frac{0-b}{a-0}=-\frac{b}{a}$$

所以，$P_1P_2\perp OP_1$，$P_1P_2\perp OP_2$，故 P_1P_2 与圆 O_1 相切，也与圆 O_2 相切. 所以 P_1P_2 为两圆的一条公切线.

又 $k_{P_1P_2}=k_{AC}$，且由于 AC 的方程为 $bx+ay=ab$，而

$$b\left(r_2+\frac{b}{c}r_2\right)+a\left(r_2+\frac{a}{c}r_2\right)-ab=(a+b+c)r_2-ab=$$

$$(a+b+c)r_2-\frac{1}{2}[(a+b)^2-c^2]=$$

$$(a+b+c)\left(r_2-\frac{a+b-c}{2}\right)=$$

$$(a+b+c)(r_2-r)\neq 0\text{（因为 }r_1\neq r_2\text{ 且 }r_1+r_2=2r\text{）}$$

所以 $AC \parallel P_1P_2$. 又

$$P_1P_2^2=\left(b-r_1-\frac{a}{c}r_1-r_2-\frac{a}{c}r_2\right)^2+$$
$$\left(a-r_1-\frac{b}{c}r_1-r_2-\frac{b}{c}r_2\right)^2=$$
$$\left[\frac{1}{c}\cdot b(b-a)\right]^2+\left[\frac{1}{c}\cdot a(a-b)\right]^2=$$
$$\frac{(a-b)^2}{c^2}(a^2+b^2)=(a-b)^2$$

所以 $P_1P_2=|a-b|$. 证毕.

注 若 $ABCD$ 为正方形，则 P_1 与 P_2 重合，由 O_1P_1 与 O_2P_2 斜率相等，且与 AC 的斜率为负倒数知两圆外切，其内公切线 P_1P_2 长度为 0，且与 AC 平行.

㊷ 给定一个非等腰的 $\triangle ABC$，设该三角形的内切圆 k（圆心为 O）分别切三边 BC，CA 和 AB 于点 A_1，B_1 和 C_1. 并且 $AA_1\cap k=A_2$，$BB_1\cap k=B_2$，A_1A_3，B_1B_3 分别是 $\triangle A_1B_1C_1$ 的内角平分线（$A_3\in B_1C_1$，$B_3\in A_1C_1$）. 求证：

（1）A_2A_3 为 $\angle B_1A_2C_1$ 的角平分线；

（2）若 P，Q 为 $\triangle A_1A_2A_3$ 和 $\triangle B_1B_2B_3$ 的外接圆的交点，则 O 在直线 PQ 上.

（2003 年中国国家集训队训练题）

证明 （1）如图 54，由弦切角定理，不难证明 $\triangle AC_1A_2\backsim\triangle AA_1C_1$. 所以 $\frac{A_2C_1}{A_1C_1}=\frac{AC_1}{AA_1}$，同理 $\frac{A_2B_1}{A_1B_1}=\frac{AB_1}{AA_1}=\frac{AC_1}{AA_1}=\frac{A_2C_1}{A_1C_1}$. 从而 $\frac{A_1B_1}{A_1C_1}=\frac{A_2B_1}{A_2C_1}$，由内角平分线性质定理得 $\frac{A_3B_1}{A_3C_1}=\frac{A_1B_1}{A_1C_1}$，所以 $\frac{A_3B_1}{A_3C_1}=\frac{A_2B_1}{A_2C_1}$，故 A_2A_3 为 $\angle B_1A_2C_1$ 的角平分线，证毕.

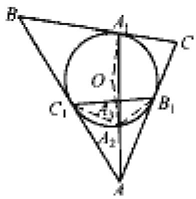


图 54

（2）如图 54，有

$$\angle OA_1A_2=\frac{\pi-\angle A_1OA_2}{2}=\frac{\pi-2\angle A_1C_1A_2}{2}=\frac{\pi}{2}-\angle A_1C_1A_2$$

而 $\angle A_1A_3A_2=2\pi-\angle A_1B_1A_2-\angle A_3A_1B_1-\angle A_3A_2B_1=$

$$2\pi-\angle A_1B_1A_2-\frac{1}{2}(\angle B_1A_1C_1+\angle B_1A_2C_1)=$$

$$\frac{3\pi}{2}-\angle A_1B_1A_2=\frac{\pi}{2}+\angle A_1C_1A_2$$

所以
$$\angle OA_1A_2+\angle A_1A_3A_2=\pi$$
于是，由弦切角定理逆定理知 OA_1 与 $\triangle A_1A_2A_3$ 的外接圆相切.

同理，OB_1 与 $\triangle B_1B_2B_3$ 的外接圆相切.

如图 55，设 OP 与两圆分别交于 Q_1 及 Q_2，则

$$OP\cdot OQ_1=OA^2=OB^2=OP\cdot OQ_2$$

所以，$OQ_1=OQ_2$，Q_1 与 Q_2 重合为 Q，O,P,Q 三点共线，即 O 在直线 PQ 上. 证毕.

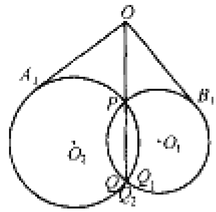


图 55

注　用根轴定理亦可证明此题.

43 凸四边形 $ABCD$ 有内切圆，该内切圆分别切边 DA,AB,BC 和 CD 于点 K,L,M,N. 设 S_1,S_2,S_3,S_4 分别是 $\triangle AKL$，$\triangle BLM$，$\triangle CMN$ 和 $\triangle DNK$ 的内切圆，圆 S_1,S_2 的另一条外公切线，圆 S_2,S_3 的另一条外公切线，圆 S_3,S_4 的另一条外公切线，圆 S_4,S_1 的另一条外公切线都不是 $ABCD$ 的边. 求证：由这些外公切线围成的四边形是一个菱形.

（2003 年中国国家集训队训练题）

证明　如图 56，设 S_1,S_2 的另一条外公切线切两圆于 P,Q. 作两圆连心线 O_1O_2 交 AB 于点 I，易知 PQ 亦过点 I. 延长 MK 交 AB 于点 T，设 $\angle KOL=2\alpha$，$\angle LOM=2\beta$，$\angle MON=2\gamma$，$\angle NOK=2\delta$，若 $\alpha\neq\beta$，不妨设 $\alpha<\beta$（$\alpha=\beta$ 的情况另行讨论）. 由

$$\angle KO_1L=\frac{\pi+\angle KAL}{2}=\frac{2\pi-2\alpha}{2}=$$

$$\pi-\alpha=\pi-\angle KML$$

所以 O_1 在圆 O 上.

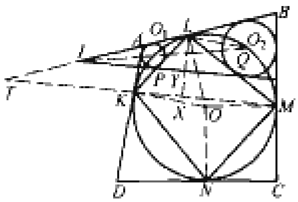


图 56

又由 $AK=AL$ 知 $O_1K=O_1L$，故 O_1 为 $\overset{\frown}{KL}$ 的中点，同理 O_2 为 $\overset{\frown}{LM}$ 的中点.

由弦切角定理知

$$\angle LIO_1=\angle LO_1O_2-\angle ILO_1=\angle LO_1O_2-\angle LO_2O_1=\frac{\beta-\alpha}{2}$$

所以
$$\angle LIP=\beta-\alpha$$
又
$$\angle T=\angle LKM-\angle TLK=\angle LKM-\angle LMK=$$

$$\beta-\alpha=\angle LIP$$

故 $MK \parallel PQ$. 而 L 到 O_1O_2 的距离为 $2R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}$，所以

$$IL=\frac{2R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

作 $LX\perp MT$ 于 X，交 PQ 于 Y，则

$$LY=IL\cdot\sin(\beta-\alpha)=4R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$$

结合

$$LX=2R\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

可知 $XY=2R\left(\sin\alpha\cdot\sin\beta-2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\right)=$

$$4R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}-\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\right)=$$

$$4R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=$$

$$2R\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$

$$R\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$$

$$R[\cos\alpha+\cos\beta-1-\cos(\alpha+\beta)]$$

若 $\alpha=\beta$，则圆 O_1，圆 O_2 为等圆，$PQ\parallel AB$，又 $AB\parallel MK$，故

$$PQ\parallel MK$$

PQ 与 MK 的距离 $=$

$2R\cdot\sin^2\alpha-2rO_1=2R\cdot\sin^2\alpha-2R(1-\cos\alpha)=$

$2R\cdot\cos\alpha-2R\cdot\cos^2\alpha=2R\cdot\cos-R(1+\cos 2\alpha)=$

$R[\cos\alpha+\cos\beta-1-\cos(\alpha+\beta)]$

所以，无论哪种情况，均有 $PQ\parallel MK$，且两者之间距离为 $R[\cos\alpha+\cos\beta-1-\cos(\alpha+\beta)]$.

同理，S_3，S_4 那条非 CD 的公切线与 MK 平行，且两者之间距离为 $R[\cos\gamma+\cos\delta-1-\cos(\gamma+\delta)]$.

结论 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$，可知 $\cos(\alpha+\beta)=-\cos(\gamma+\delta)$，所以，这两条外公切线平行，且距离为 $R(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta-2)$. 同理，另两条外公切线平行，且距离为 $R(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta-2)$.

所以，四条外公切线围成一个菱形（两组对边距离相等的平行四边形是菱形）.

44 设 $AEFG$ 为一个圆内接凸四边形，延长 AE，GF 得交点 B，延长 EF，AG 得交点 C，D 为 BC 的中点，联结 AD 交该四边形的外接圆于点 H. 求证：B，F，H，C 四点共圆.

（2003 年中国国家集训队训练题）

证明 如图57,我们假设 AD 不过 F(否则 H 与 F 为同一点,$\triangle BFC$ 的外接圆即是它们的共圆),延长 AD 得 P,使 $AD=DP$.连 BP,CP,则 $ABPC$ 为平行四边形.

注意到

$$\angle BFC=\angle EFG=\pi-\angle EAG=\pi-\angle BPC$$

故 B,F,C,P 四点共圆.

又

$$\angle AHF=\angle AGF=\pi-\angle AEF=\pi-\angle PCE$$

所以

$$\angle PHF=\pi-\angle AHF=\angle PCF$$

所以 F,H,C,P 四点共圆.

于是 B,F,H,C 四点共圆,证毕.

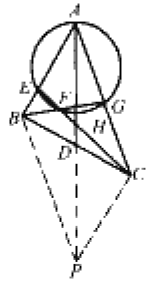


图 57

㊺ 设 $ABCD$ 为等腰梯形,$AB\ /\!/\ CD$.$\triangle BCD$ 的内切圆 W 切 CD 于 E,F 为 $\angle DAC$ 的内角平分线上一点,使得 $EF\perp CD$.$\triangle ACF$ 的外接圆与直线 CD 交于点 C 和 G.求证:$GF>BF$.

(2003 年中国国家集训队训练题)

证明 如图58,作 $\triangle ACD$ 在 $\angle A$ 内的旁切圆 K,切 AD 延长线于 R,切 AC 延长线于 S,切 CD 于 T,那么

$$DT-CT=DR-CS=(AR-AD)-(AS-AC)=$$
$$AC-AD=BD-BC=DE-CE$$

所以 T,E 为同一点.进而 $KE\perp CD$ 且 K 在 $\angle DAC$ 的平分线上,K 与 F 为同一点,所以

$$\angle AGC=\angle AFC=\pi-\angle ACF-\angle CAF=$$
$$\pi-\left(\pi-\frac{1}{2}\angle SCD\right)-\frac{1}{2}\angle DAC=$$
$$\frac{1}{2}(\angle SCD-\angle DAC)=\frac{1}{2}\angle ADC$$

故 $\angle GAD=\angle ADC-\angle AGC=\frac{1}{2}\angle ADC=\angle AGC$,$AD=GD$

联结 FD,则 $\angle RDF=\angle CDF$,故 $\angle GDF=\angle ADF$,又 $GD=AD$,$DF=DF$,因此 $\triangle GDF\cong\triangle ADF$,得 $GF=AF$.

延长 FE 交 AB 于 J,则由 $DE>CE$ 知 $AJ>BJ$(或者说,J 与 B,C 同在 $ABCD$ 对称轴的一侧),可知 $AF^2-BF^2=AJ^2-BJ^2>0$,故 $AF>BF$,$GF=AF>BF$.证毕.

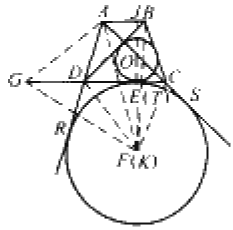


图 58

⑯ 长分别为 a,b,c,d 的凸四边形 $ABCD$ 外切于圆 O，求证：
$OA\cdot OC+OB\cdot OD=\sqrt{abcd}$.
（2003年中国国家集训队测试题第2次）

证法1 如图59，不妨设圆 O 半径为1，设 $\angle OAD=\angle OAB=\alpha$，$\angle OBA=\angle OBC=\beta$，$\angle OCB=\angle OCD=\gamma$，$\angle ODA=\angle ODC=\delta$，则

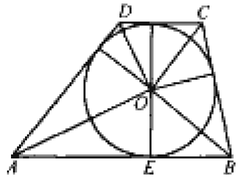


图 59

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$$

$$OA=\frac{OE}{\sin\alpha}=\frac{1}{\sin\alpha},OB=\frac{1}{\sin\beta},OC=\frac{1}{\sin\gamma},OD=\frac{1}{\sin\delta}$$

所以

$$OA\cdot OC+OB\cdot OD=\frac{1}{\sin\alpha\cdot\sin\gamma}+\frac{1}{\sin\beta\cdot\sin\delta}=$$

$$\frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma+\sin\beta\cdot\sin\delta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\sin\delta}\qquad ①$$

$$AB=AE+EB=OE\cdot\cot\alpha+OE\cdot\cot\beta=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=$$

$$\frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta+\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

同理

$$BC=\frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\cdot\sin\gamma},CD=\frac{\sin(\gamma+\delta)}{\sin\gamma\cdot\sin\delta},DA=\frac{\sin(\delta+\alpha)}{\sin\delta\cdot\sin\alpha}$$

由于
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$$
故
$$\sin(\gamma+\delta)=\sin(\alpha+\beta),\sin(\delta+\alpha)=\sin(\beta+\gamma)$$
从而

$$\sqrt{abcd}=\sqrt{\frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta+\gamma)\cdot\sin(\gamma+\delta)\cdot\sin(\delta+\alpha)}{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma\cdot\sin^2\delta}}=$$

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\sin\delta}\qquad ②$$

比较①②知，只须证明

$$\sin\alpha\cdot\sin\gamma+\sin\beta\cdot\sin\delta=\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta+\gamma)\qquad ③$$

利用 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$ 且 $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，我们可直接证明③，也可构造一圆内接四边形 $A_1A_2A_3A_4$，使 $\overset{\frown}{A_1A_2}$，$\overset{\frown}{A_2A_3}$，$\overset{\frown}{A_3A_4}$，$\overset{\frown}{A_4A_1}$ 所对圆周角 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$（图60），由托勒密定理有

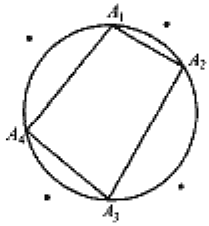


图 60

$$A_1A_2\cdot A_3A_4+A_1A_4\cdot A_2A_3=A_1A_3\cdot A_2A_4$$

即
$$\sin\alpha\cdot\sin\gamma+\sin\beta\cdot\sin\delta=\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta+\gamma)$$
故③得证.

综上所述，原命题得证.

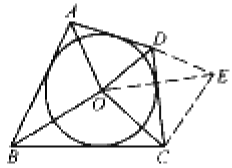


图 61

证法 2 由于 $\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}+\frac{D}{2}=180^\circ$，我们有

$$\angle AOB+\angle COD=180^\circ$$

于是在四边形的形外作 $\triangle DCE$，使 $\triangle DCE\backsim\triangle ABO$(图 61)，则四边形 $DOCE$ 内接于圆，由托勒密定理有

$$DE\cdot OC+CE\cdot OD=CD\cdot OE \quad ①$$

而 $\frac{DE}{OA}=\frac{CE}{OB}=\frac{CD}{AB}$，因此由 ① 即得

$$OA\cdot OC+OB\cdot OD=AB\cdot OE \quad ②$$

又
$$\angle DOE=\angle DCE=\angle ABO=\angle OBC$$
$$\angle OED=\angle OCD=\angle BCO$$

所以
$$\triangle DOE\backsim\triangle OBC$$

同理，$\triangle OCE\backsim\triangle AOD$，于是有

$$\frac{OE}{BC}=\frac{OD}{OB},\frac{OE}{DA}=\frac{CE}{OD}$$

两式相乘即得
$$\frac{OE^2}{BC\cdot DA}=\frac{CE}{OB}$$

但 $\frac{CE}{OB}=\frac{CD}{AB}$，因此

$$AB^2\cdot OE^2=AB^2\cdot\frac{CD\cdot BC\cdot DA}{AB}=AB\cdot BC\cdot CD\cdot DA=abcd$$

再由 ② 即得所证.

> ⑰ $\triangle ABC$ 中，$AB>BC>CA$，$AB=6$，$\angle C-\angle B=90^\circ$，圆 O 为内切圆，E 是 BC 边上的切点. EF 是圆 O 的直径. 射线 AF 交 BC 边于点 D. 若 DE 等于 $\triangle ABC$ 外接圆的半径，求边 BC，AC 的长.
>
> (2003 年中国国家集训队测试题第 4 次)

解 如图 62，过 F 作圆 O 的切线交 AB，AC 于 M，N，显然有 $MN\parallel BC$；过 C 作 $CK\perp BC$，K 在 AB 上.

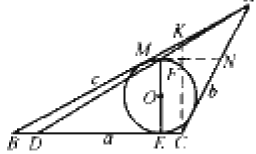


图 62

易知 $\triangle AMF\backsim\triangle ABD$，$\triangle AMN\backsim\triangle ABC$.

由切线长定理知

$$AM+MF=AN+NF=\frac{1}{2}\triangle AMN\text{ 周长}$$

因为

$$\frac{AM}{AB}=\frac{MF}{BD}=\frac{AM+MF}{AB+BD}=\frac{\frac{1}{2}\triangle AMN\text{ 周长}}{AB+BD} \quad ①$$

又

$$\frac{AM}{AB}=\frac{\triangle AMN\text{ 周长}}{\triangle ABC\text{ 周长}} \quad ②$$

所以 $$AB + BD = \frac{1}{2}\triangle ABC \text{ 周长}$$

另据切线长定理易证

$$AB + EC = \frac{1}{2}\triangle ABC \text{ 周长}$$

所以 $$BD = EC$$

记 $BC = a, CA = b, AB = c, p = \frac{1}{2}(a + b + c)$，易知 $BD = EC = p - c$，此时 $\triangle ABC$ 外接圆半径

$R = DE = BC - (BD + EC) = a - 2(p - c) = c - b$

易证 $\triangle ACK \backsim \triangle ABC$，从而

$$AK = \frac{b^2}{c}, CK = \frac{ab}{c}, BK = \frac{c^2 - b^2}{c}$$

因为 $$2R = \frac{b}{\sin B} = \frac{b}{\frac{CK}{BK}} = \frac{b \cdot BK}{CK} = \frac{b \cdot \frac{c^2 - b^2}{c}}{\frac{ab}{c}} = \frac{c - b}{a}(c + b)$$

而 $$2R = 2(c - b)$$

所以 $$b + c = 2a$$

由 $\mathrm{Rt}\triangle BCK$ 得 $BK^2 = BC^2 + CK^2$，即

$$\left(\frac{c^2 - b^2}{c}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{ab}{c}\right)^2$$

或 $$\frac{(c - b)^2(2a)^2}{c^2} = a^2 + \frac{a^2b^2}{c^2}$$

化简得 $$b^2 + c^2 = 4(c - b)^2$$

整理变形为 $$\left(\frac{b}{c}\right)^2 - \frac{8}{3}\left(\frac{b}{c}\right) + 1 = 0$$

解得 $\frac{b}{c} = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}$.

因为 $b < c$，所以 $\frac{b}{c} = \frac{4 - \sqrt{7}}{3}$.

因为 $c = 6$，所以 $b = 8 - 2\sqrt{7}$，$a = \frac{1}{2}(b + c) = 7 - \sqrt{7}$.

㊽ 在等腰 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle A = 90°$，$AB = 1$，D 为 BC 的中点，E，F 为 BC 边上另外两点. M 为 $\triangle ADE$ 的外接圆和 $\triangle ABF$ 的外接圆的另一个交点；N 为直线 AF 与 $\triangle ACE$ 的外接圆的另一个交点；P 为直线 AD 与 $\triangle AMN$ 的外接圆的另一个交点(图 63). 求 AP 的长度.

(2003 年中国国家集训队测试题第 5 次)

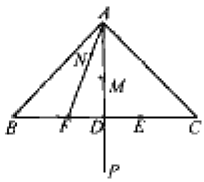


图 63

解 利用反演变换.

以点 A 为反演中心，$r=1$ 为反演变换的半径. 在这个反演变换下，用 X^* 来表示点 X 的像. 由反演变换的性质：B,F,D,E,C 在一条直线上 $\Leftrightarrow A,B^*,F^*,D^*,E^*,C^*$ 在同一个圆上；M 是 $\triangle ADE$ 的外接圆和 $\triangle ABF$ 的外接圆的另一交点 $\Leftrightarrow M^*$ 是 D^*E^* 与 B^*F^* 的交点；N 为 AF 和 $\triangle ACE$ 的外接圆的另一个交点 $\Leftrightarrow N^*$ 是 AF^* 与 C^*E^* 的交点；P 是 AD 与 $\triangle AMN$ 的外接圆的另一交点 $\Leftrightarrow P^*$ 是 AD^* 与 M^*N^* 的交点.(图 64)

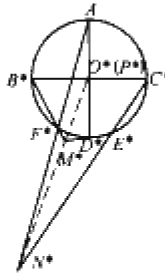


图 64

设 B^*C^* 交 AD^* 于 O^*，对圆内接六边形 $AF^*B^*C^*E^*D^*$ 用帕斯卡(Pascal)定理知 AF^* 与 C^*E^* 的交点、F^*B^* 与 D^*E^* 的交点、B^*C^* 与 AD^* 的交点三点共线，即 M^*,N^*,O^* 三点共线.

又 P^* 是 M^*N^* 与 AD^* 的交点，所以 $P^*=O^*$，即 P^* 在直线 B^*C^* 上，由反演的性质，可导出原图中 A,B,P,C 四点共圆，从而

$$AD\cdot DP=BD\cdot DC\Rightarrow AD=BD=DC=DP=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

所以 $AP=\sqrt{2}$.

为了严密起见，下面将证明帕斯卡定理.

设 $ABCDEF$ 内接于圆(与顶点的次序无关，即 $ABCDEF$ 无须为凸六边形)，$AB\cap DE=X$，$BC\cap EF=Y$，$CD\cap AF=Z$，则 X,Y,Z 共线.(图65)

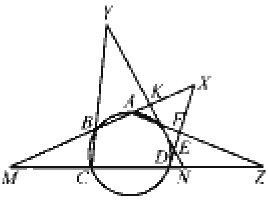


图 65

设 $AB\cap EF=K$，$AB\cap CD=M$，$CD\cap EF=N$，由梅涅劳斯定理得

$$\frac{KX}{XM}\cdot\frac{MD}{DN}\cdot\frac{NE}{EK}=1$$

$$\frac{MZ}{ZN}\cdot\frac{NF}{FK}\cdot\frac{KA}{AM}=1$$

$$\frac{NY}{YK}\cdot\frac{KB}{BM}\cdot\frac{MC}{CN}=1$$

将以上三式相乘，并利用圆幂定理得

$$MA\cdot MB=MD\cdot MC$$

$$ND\cdot NC=NE\cdot NF$$

$$KA\cdot KB=KE\cdot KF$$

从而

$$\frac{KX}{XM}\cdot\frac{MZ}{ZN}\cdot\frac{NY}{YK}=1$$

又 X,Y,Z 分别在 KM,NK,MN 上，故由梅涅劳斯定理的逆定理知 X,Y,Z 共线，证毕.

⑲ 设$\triangle ABC$内接于圆O，过A作切线PD，D在射线BC上，P在射线DA上．过P作圆O的割线PU，U在BD上，PU交圆O于Q，T且交AB，AC于R，S．证明：若$QR=ST$，则$PQ=UT$．

（2003年中国国家集训队测试题第8次）

证明 先证明一个引理：如图66所示，圆O的两弦AM，QT交于F，F为QT中点，过A，M作圆O的切线，交直线QT于P，U，则有$PQ=UT$．

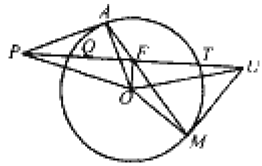


图66

引理的证明：易证P,A,F,O与U,M,O,F分别四点共圆$\Rightarrow\angle OPF=\angle OAF=\angle OMF=\angle OUF\Rightarrow\triangle OPF\cong\triangle OUF\Rightarrow PF=UF\Rightarrow PQ=UT$．

现回到原题．

如图67，作$OE\perp BC$，$OF\perp QT$，则E为BC中点，F为QT中点，也是RS中点．

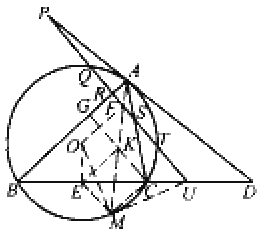


图67

作$CG\ /\!/\ RS$，联结AF延长交圆O于M，交CG于点K；再联结EK，EM，CM，UM，OM，易知K为CG中点，$EK\ /\!/\ AB$．因为$\angle KEC=\angle ABC=\angle AMC=\angle KMC$，所以$K,E,M,C$四点共圆，所以

$$\angle EMF=\angle EMK=\angle ECK=\angle EUF=180^\circ-\angle EOF\angle EMF+\angle EOF=180^\circ$$

所以F,O,E,M四点共圆．但由

$$\angle OEU+\angle OFU=90^\circ+90^\circ=180^\circ$$

得F,O,E,U四点共圆，从而可断定F,O,E,M,U五点必共圆，所以O,E,M,U四点共圆，$\angle OMU=\angle OEU=90^\circ$，因此$UM$是圆$O$的一条切线，根据引理知$PQ=UT$，得证．

⑳ 在一个非钝角$\triangle ABC$中，$AB>AC$，$\angle B=45^\circ$，O和I分别是$\triangle ABC$的外心和内心，且$\sqrt{2}OI=AB-AC$，求$\sin A$．

（1998年中国数学冬令营）

解法1 设$\triangle ABC$外接圆和内切圆半径分别为R，r．$\angle A$，$\angle B$及$\angle C$所对边分别为a，b，c．那么，由已知条件$OI=\dfrac{c-b}{\sqrt{2}}$，再结合欧拉定理$OI^2=R^2-2Rr$，可得

$$\left(\frac{c-b}{\sqrt{2}}\right)^2=R^2-2Rr \quad ①$$

再由熟知的几何关系得

$$r = \frac{1}{2}(c + a - b)\tan\frac{B}{2} = \frac{1}{2}(c + a - b)\tan\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}-1}{2}(c + a - b) \quad ②$$

由正弦定理

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad ③$$

结合 ①,②,③ 可得

$$\left(\frac{2R\cdot\sin C - 2R\cdot\sin B}{\sqrt{2}}\right)^2 = R^2 - 2Rr = R^2 - 2R\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{2}(2R\cdot\sin A + 2R\cdot\sin C - 2R\cdot\sin B)$$

整理得

$$1 - 2(\sin C - \sin B)^2 = 2(\sqrt{2} - 1)(\sin A + \sin C + \sin B)$$

因为 $\angle B = \frac{\pi}{4}$,$\sin B = \frac{\sqrt{2}}{2}$,且

$$\sin C = \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \angle A\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos A + \sin A)$$

所以

$$2\sin A\cdot\cos A - (2 - \sqrt{2})\sin A - \sqrt{2}\cos A + \sqrt{2} - 1 = 0$$

$$(\sqrt{2}\sin A - 1)(\sqrt{2}\cos A - \sqrt{2} + 1) = 0$$

于是 $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\cos A = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

当 $\cos A = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$$

综上,$\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\sin A = \sqrt{\sqrt{2} - \frac{1}{2}}$.

解法 2 过点 I 作 $II_C \perp AB$,$II_B \perp AC$,$II_A \perp BC$,$OD \perp BC$,其中,I_C,I_B,I_A,D 均为垂足,则 D 为线段 BC 中点.且 I_C,I_B,I_A 也分别为圆 I 与边 AB,AC,BC 的切点.由已知条件

$$\sqrt{2}OI = AB - AC = (AI_C + I_CB) - (AI_C + I_BC) = I_CB - I_BC = I_AB - I_AC$$

由 $AB > AC$ 知 $I_AB > I_AC$,故点 D 在线段 I_AB 上.

又因为 $I_AB = \frac{1}{2}BC + I_AD$,$I_AC = \frac{1}{2}BC - I_AD$,所以,$\sqrt{2}OI = 2I_AD$,即 $OI = \sqrt{2}I_AD$,所以直线 OI 与直线 BC 的夹角必为 $\frac{\pi}{4}$.又因

为 $\angle B=\frac{\pi}{4}$,所以有且仅有 $OI\perp AB$ 或 $OI\parallel AB$.

下面针对这两种情形进行讨论.

1) 当 $OI\perp AB$ 时,I_C 为线段 AB 的中点,所以 $AI_C=BI_C$,所以

$$\frac{1}{2}(AB+AC-BC)=\frac{1}{2}(AB+BC-AC)$$

于是 $AC=BC$,$\triangle ABC$ 为以 AB 为斜边的等腰直角三角形,$\angle A=\angle B=\frac{\pi}{4}$,$\angle C=\frac{\pi}{2}$,点 O 与 I_C 重合,如图 68 所示.

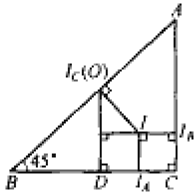


图 68

2) 当 $OI\parallel AB$ 时,作 $OE\perp AB$,E 为垂足,如图 69 所示.则 $II_C=OE=r$,$\angle BOE=\angle AOE=\angle C$,所以

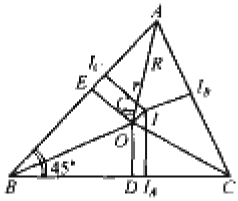


图 69

$$R\cdot\cos C=r=4R\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$$

所以

$$\begin{aligned}\cos C&=4\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=\\&2\sin\frac{\pi}{8}\left(2\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}\right)=\\&2\sin\frac{\pi}{8}\left(\cos\frac{A-C}{2}-\cos\frac{A+C}{2}\right)\\&2\sin\frac{\pi}{8}\cdot\left[-\sin\frac{\pi}{8}+\cos\left(\frac{3\pi}{8}-\angle C\right)\right]=\\&\cos\frac{\pi}{4}-1+2\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{8}-\angle C\right)=\\&\cos\frac{\pi}{4}-1+\cos C+\sin\left(\angle C-\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

所以

$$\sin\left(\angle C-\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

由于 $0\leqslant\angle C-\frac{\pi}{4}\leqslant\frac{\pi}{2}$,所以

$$\angle C-\frac{\pi}{4}=\arcsin\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\angle C=\frac{\pi}{4}+\arcsin\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\angle A=\frac{\pi}{2}-\arcsin\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

于是

$$\sin A=\cos\left[\arcsin\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=\sqrt{1-\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$$

综上,$\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 或 $\sin A=\sqrt{\sqrt{2}-\frac{1}{2}}$.

51 设 AB 是一个圆 W 的直径，l 为过点 A 的 W 的切线，C，M，D 为直线 l 上依次排列的三个点，且 $CM = MD$．直线 BC、BD 分别交 W 于点 P，Q．求证：在直线 BM 上存在一点 R，使得 RP 和 RQ 均与 W 相切．

（2003 年中国国家队培训题）

证明 假设过 P 的圆 W 的切线交 BM 于 R，设 $\angle ACB = \theta$，$\angle ADB = \varphi$，联结 AP，AQ，WP，设 RP 的延长线交 AC 于 E．由 AB 为圆 W 的直径，可知 $AP \perp BC$，$AQ \perp BD$．而 $\angle EAP = \angle EPA$，故 $\angle ECP = \angle EPC$，进而 $AE = EP = EC$，即 E 为 AC 中点．如图 70 所示．

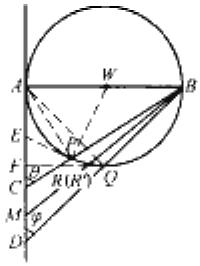


图 70

再设 $AB = 1$，则

$$AC = \cot\theta, AD = \cot\varphi, EM = \frac{\cot\varphi}{2}$$

$$EC = \frac{\cot\theta}{2}, \frac{CP}{PB} = \frac{CP}{PA}\cdot\frac{PA}{PB} = \cot^2\theta$$

在 $\triangle BMC$ 和截线 RPE 中用梅涅劳斯定理有

$$\frac{BR}{RM}\cdot\frac{ME}{EC}\cdot\frac{CP}{PB} = 1$$

即

$$\frac{BR}{BM}\cdot\frac{\cot\varphi}{\cot\theta}\cdot\cot^2\theta = 1$$

所以

$$\frac{BR}{RM} = \frac{1}{\cot\varphi\cdot\cot\theta} = \tan\varphi\cdot\tan\theta \qquad ①$$

同理，我们设过 Q 的圆 W 的切线交 BM 于 R'，设 QR' 交 AD 于 F，则 F 为 AD 的中点，且易知

$$DF = \frac{\cot\varphi}{2}, MF = \frac{\cot\theta}{2}, \frac{BQ}{QD} = \frac{BQ}{QA}\cdot\frac{QA}{QD} = \tan^2\varphi$$

在 $\triangle BMD$ 和截线 $QR'F$ 中用梅涅劳斯定理有

$$\frac{BQ}{QD}\cdot\frac{DF}{FM}\cdot\frac{MR'}{R'B} = 1$$

于是 $\frac{BR'}{R'M} = \frac{BQ}{QD}\cdot\frac{DF}{FM} = \tan^2\varphi\cdot\frac{\cot\varphi}{\cot\theta} = \tan\varphi\cdot\tan\theta = \frac{BR}{RM}$

而 R，R' 均在线段 BM 内，故 R 与 R' 重合，即我们证得了在直线 BM 上存在一点 R，使 RP 和 RQ 均与 W 相切．

52 设 $A_1A_2A_3A_4$ 是一个既有外接圆，又有内切圆的凸四边形，且其内切圆分别与 A_1A_2，A_2A_3，A_3A_4 和 A_4A_1 切于点 B_1，B_2，B_3，B_4. 求证：

$$\left(\frac{A_1A_2}{B_1B_2}\right)^2+\left(\frac{A_2A_3}{B_2B_3}\right)^2+\left(\frac{A_3A_4}{B_3B_4}\right)^2+\left(\frac{A_4A_1}{B_4B_1}\right)^2\geqslant 8$$

（2003 年中国国家队培训题）

证明　如图 71，设内切圆半径为 r，而

$$\angle A_2A_1A_4=\alpha,\angle A_1A_2A_3=\beta$$
$$\angle A_2A_3A_4=\nu,\angle A_3A_4A_1=\theta$$

则

$$\alpha+\beta+\nu+\theta=360^\circ$$

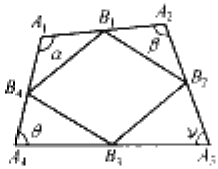


图 71

易得　$A_1A_2=r\left(\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}\right)$，$B_1B_2=2r\cdot\cos\frac{\beta}{2}$

所以

$$\left(\frac{A_1A_2}{B_1B_2}\right)^2=\frac{1}{4}\cdot\frac{\left(\cot\frac{\alpha}{2}+\cot\frac{\beta}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{\beta}{2}}\geqslant\frac{\cot\frac{\alpha}{2}\cdot\cot\frac{\beta}{2}}{\cos^2\frac{\beta}{2}}$$

同理 $\left(\frac{A_2A_3}{B_2B_3}\right)^2\geqslant\frac{\cot\frac{\beta}{2}\cdot\cot\frac{\nu}{2}}{\cos^2\frac{\nu}{2}}$，$\left(\frac{A_3A_4}{B_3B_4}\right)^2\geqslant\frac{\cot\frac{\nu}{2}\cdot\cot\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}$

$$\left(\frac{A_4A_1}{B_4B_1}\right)^2\geqslant\frac{\cot\frac{\theta}{2}\cdot\cot\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

四式相乘，得

$$\left(\frac{A_1A_2}{B_1B_2}\right)^2\left(\frac{A_2A_3}{B_2B_3}\right)^2\left(\frac{A_3A_4}{B_3B_4}\right)^2\left(\frac{A_4A_1}{B_4B_1}\right)^2\geqslant$$
$$\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin^2\frac{\beta}{2}\cdot\sin^2\frac{\nu}{2}\cdot\sin^2\frac{\theta}{2}}\geqslant$$
$$\frac{1}{\sin^8 45^\circ}=16\text{（这里用到琴生(Jensen)不等式）}$$

从而，利用均值不等式，可知原式左边 $\geqslant 4\sqrt[4]{\prod\left(\frac{A_1A_2}{B_1B_2}\right)^2}\geqslant$ $4\cdot2=8$，命题得证.

53 设 $ABCD$ 为一个圆内接四边形，且 AD 与 BC 不平行，E，F 为 CD 上的点，G，H 分别 $\triangle BCE$ 和 $\triangle ADE$ 的外心．求证：AB，CD，GH 三线共点或两两平行的充要条件是 A，B，E，F 四点共圆．

（2003 年中国国家队培训题）

证明 1）若 A，B，E，F 四点共圆，且 AB，CD 交于 T．则有

$$\angle AFD = \angle ABE \tag{①}$$

又由于 A，B，C，D 共圆，故

$$\angle ADF + \angle ABE + \angle CBE = 180^\circ$$

又
$$\angle ADF + \angle AFD + \angle DAF = 180^\circ$$

结合①可得 $\angle DAF = \angle CBE$，进而 $\angle DHF = 2\angle DAF = 2\angle CBE = \angle EGC$．

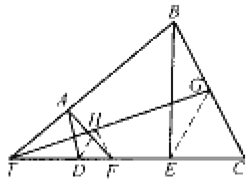


图 72

另一方面，$\triangle HDF$ 和 $\triangle GEC$ 均为等腰三角形，如图 72 所示，故

$$\angle HDF = \angle GEC \Rightarrow DH \parallel GE$$

欲证 T，H，G 共线，只须证 $\angle THD = \angle TGE$，也就是

$$\frac{TD}{DH} = \frac{TE}{GE} \tag{②}$$

注意到

$$DF = 2DH \cdot \sin\angle DAF, CE = 2GE \cdot \sin\angle EBC$$

所以

$$\frac{HD}{DF} = \frac{GE}{EC} \tag{③}$$

由②，③可转化为证明

$$\frac{TE}{CE} = \frac{TD}{DF} \tag{④}$$

事实上

$$\frac{TE}{CE} = \frac{TB \cdot \sin\angle TBE}{BC \cdot \sin\angle CBE} = \frac{\sin\angle BCE \cdot \sin\angle TBE}{\sin\angle BTE \cdot \sin\angle CBE} = \frac{\sin\angle TAD \cdot \sin\angle AFT}{\sin\angle BTE \cdot \sin\angle DAF} = \frac{AT \cdot \sin\angle TAD}{AF \cdot \sin\angle DAF} = \frac{TD}{DF}$$

其中利用了正弦定理和面积比，故④式成立，即 AB，HG，CD 交于一点．

若 $AB \parallel CD$，则有 $AD = BC$，又有 $\angle ADF = \angle BCE$，$\angle DAF = \angle CBE$，所以 $\triangle ADF \cong \triangle BCE$，从而它们的外心 H，G 到对应边 DF，CE 距离相等，从而有 $HG \parallel CD \parallel AB$，故三线平行，命题成立．

2）若三线共点或平行，则 A，B，E，F 共圆．我们用同一法证

明.

当 AB，CD 交于 T 时，对任一给定的点 F，H 也随之确定，从而直线 TH 也确定. 注意到点 G 既在 TH 上，又在 BC 中垂线上. 而 AD 不平行 BC，故这两直线不可能重合，从而 G 为它们的交点，被唯一确定，进而 E 也被唯一确定.

又如前所证，我们取点 E' 使 $\angle EBC = \angle DAF$ 时，有 T，H，G 共线，从而此时的 E' 与 E 重合，故 A，B，E，F 共圆.

当 $AB \parallel CD$ 时，由于 $GH \parallel AB \parallel CD$，仿上易知，$F$ 取定时，H 确定，直线 HG 也确定. 由于 AD 不平行于 BC，故 BC 垂直平分线不可能是 HG，又 G 为 HG 和 BC 垂直平分线的交点，故 G 唯一确定，进而 E 也唯一确定，由同一法易知当且仅当 A，B，E，F 共圆时，$GH \parallel AB \parallel CD$.

综上所述，命题得证.

54 圆 S_1 和 S_2 交于点 P 和 Q，在 S_1 上取两个不同的 A_1 和 B_1（不同于 P，Q），直线 A_1P 和 B_1P 分别交 S_2 于另外一点 A_2，B_2. 直线 A_1B_1 和 A_2B_2 交于点 C. 求证：当 A_1 和 B_1 变化时，$\triangle A_1A_2C$ 的外心在一个固定的圆上变化.

（2003 年中国国家队培训题）

证明　如图 73，设 O_1，O_2 分别为 S_1，S_2 的圆心，考虑极限位置，当 A_1P 与 S_2 相切时，A_2 对应于 P，B_1 就是 C，此时 $\triangle A_1A_2C$ 的外心 O 为 O_1，类似地，可知 O 还可为 O_2，于是，我们猜测，O 在 $\triangle O_1QO_2$ 的外接圆上.

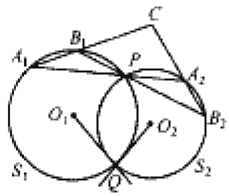


图 73

为证上述猜测，我们依如下步骤进行.

1) 先证 A_1，C，A_2，Q 共圆.

注意到

$$\angle A_1CA_2 + \angle A_1QA_2 = \angle A_1CA_2 + \angle A_1QP + \angle PQA_2 = \angle B_1CB_2 + \angle CB_1B_2 + \angle CB_2B_1 = 180^\circ$$

故 A_1，C，A_2，Q 共圆. 这里用到了圆内接四边形的一个外角等于其不相邻的内对角.

2) 再证 O，O_1，Q，O_2 共圆.

由 1) 知 $OQ = OA_1$，故 $O_1Q = O_1A_1$. 因此

$$\angle OO_1Q = \frac{1}{2}\angle A_1OQ = 180^\circ - \angle A_1PQ$$

类似地　　$$\angle OO_2Q = 180^\circ - \angle A_2PQ$$

（这里用到圆心角等于圆周角的两倍）. 因此

$$\angle OO_1Q + \angle OO_2Q = 180^\circ - \angle A_1PQ + 180^\circ - \angle A_2PQ = 180^\circ$$

所以，$\triangle A_1A_2C$ 的外心（$\triangle B_1B_2C$ 的外心类似）在 $\triangle O_1O_2Q$ 的外接圆上，命题获证.

55 设在 $\triangle ABC$ 内存在一点 F，使得 $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA$. 直线 BF 和 CF 分别交 AC，AB 于点 D 和 E. 求证：$AB + AC \geqslant 4DE$.

（2003 年中国国家队培训题）

证法 1 先证一个引理：$\triangle DEF$ 为给定的，P，Q 分别为 FD，FE 上的点使得

$$PF \geqslant \lambda DF, QF \geqslant \lambda EF, \lambda > 0$$

如果 $\angle PFQ \geqslant 90°$，那么 $PQ \geqslant \lambda DE$.

引理的证明：记 $\angle PFQ = \theta$，由于 $\theta > 90°$，从而 $\cos\theta \leqslant 0$. 于是，我们有

$$PQ^2 = PF^2 + QF^2 - 2PF \cdot QF \cdot \cos\theta \geqslant$$
$$(\lambda DF)^2 + (\lambda FE)^2 - 2\cos\theta \cdot \lambda DF \cdot \lambda EF = (\lambda DE)^2$$

于是，$PQ \geqslant \lambda DE$，引理获证.

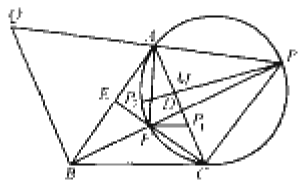


图 74

回到原题，由条件，知

$$\angle AFE = \angle BFE = \angle CFD = \angle AFD = 60°$$

设直线 BF，CF 分别交 $\triangle AFC$ 的外接圆，$\triangle AFB$ 的外接圆于点 P，Q，如图 74 所示，则易证 $\triangle APC$ 与 $\triangle ABQ$ 都是正三角形. 现在我们对 $\lambda = 4$，$\theta = 120°$，运用引理. 为此，设 P_1 为 F 到 AC 的投影，AC 的中垂线交 $\triangle AFC$ 的外接圆于点 P 和 P_2，M 为 AC 的中点，则

$$\frac{PD}{DF} = \frac{PM}{FP_1} \geqslant \frac{PM}{MP_2} = 3$$

$PF \geqslant 4DF$，同理 $QF \geqslant 4EF$，而 $\angle DFE = 120°$，由引理知 $PQ \geqslant 4DE$，所以

$$AB + AC = AQ + AP \geqslant PQ \geqslant 4DE$$

证法 2 分别记 AF，BF，CF 为 x，y，z，则由

$$S_{\triangle CFA} = S_{\triangle CFD} + S_{\triangle AFD} \Rightarrow CF \cdot AF = CF \cdot DF + AF \cdot DF$$

可知 $DF = \dfrac{CF \cdot AF}{CF + AF}$，于是 $DF = \dfrac{xz}{x+z}$，同理 $EF = \dfrac{xy}{x+y}$. 在 $\triangle ABF$，$\triangle ACF$，$\triangle DEF$ 中分别运用余弦定理，欲证的不等式转为证明

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geqslant$$
$$4\sqrt{\left(\frac{xy}{x+y}\right)^2 + \left(\frac{xz}{x+z}\right)^2 + \left(\frac{xy}{x+y}\right)\left(\frac{xz}{x+z}\right)}$$

由于 $\frac{x+y}{4} \geqslant \frac{xy}{x+y}, \frac{x+z}{4} \geqslant \frac{xz}{x+z}$

于是,只须证明

$$\sqrt{x^2+xy+y^2}+\sqrt{x^2+xz+z^2} \geqslant$$
$$\sqrt{(x+y)^2+(x+z)^2+(x+y)(x+z)}$$

两边平方.整理得

$$2\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xz+z^2)} \geqslant x^2+2(y+z)x+yz$$

再两边平方,左减右,只须证 $3(x^2-yz)^2 \geqslant 0$,所以,命题成立.

> ㊻ 锐角 $\triangle ABC$ 的内切圆 Ω 切 BC 于点 K, AD 为 $\triangle ABC$ 的高, M 为 AD 的中点,直线 KM 交 Ω 于另一点 N.求证: $\triangle BCN$ 的外接圆与 Ω 切于点 N.
>
> (2003 年中国国家队培训题)

证法 1 如图75,可设 $AB \neq AC$(因为 $AB = AC$,由对称性,结论是平凡的),不妨设 $AC > AB$,设 BC 的中垂线分别交 NK, BC 于点 P, A_1. 只须证明: N, Ω 的圆心 I 及 $\triangle BCN$ 的外心 S 三点共线.由于 $IK \parallel SP$,且都与 BC 垂直,我们只须证明: P 在 $\triangle BCN$ 的外接圆上(因为,若如此,则 $SP = SN$,进而 $\angle PNS = \angle NPS = \angle NKI = \angle PNI$,故 N, I, S 共线).

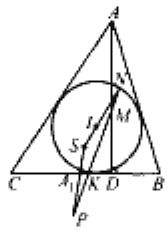


图 75

为证此结论,我们证明

$$NK \cdot KP = BK \cdot KC$$

记 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$,则 $BK = s-b$, $KC = s-c$,所以

$$BK \cdot KC = (s-b)(s-c)$$

在 $\triangle ABC$ 中运用余弦定理

$$\cos B = \frac{1}{2ac}(c^2+a^2-b^2)$$

$$BD = c \cdot \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2a}$$

又 $$KA_1 = BA_1 - BK = \frac{1}{2}(b-c)$$

$$DK = BK - BD = \frac{(b-c)(s-a)}{a}$$

记 $\angle MKD = \varphi$,则

$$\tan\varphi = \frac{MD}{DK} = \frac{\frac{1}{2}AD \cdot a}{(b-c)(s-a)} = \frac{S_{\triangle ABC}}{(b-c)(s-a)}$$

由于 $\angle NIK = 2\angle MKD = 2\varphi$,故 $NK = 2r \cdot \sin\varphi$,其中, r 为 Ω 的半径,最后, $\triangle A_1KP$ 中, $KP = KA_1 \cdot \sec\varphi$,所以

$$NK \cdot KP = 2r \cdot KA_1 \cdot \tan \varphi = \frac{r \cdot S_{\triangle ABC}}{s-a} = \frac{S^2_{\triangle ABC}}{s(s-a)} =$$
$$(s-b)(s-c) = BK \cdot KC$$

(这里用到海伦公式：$S_{\triangle ABC} = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$)

因此，命题成立．

证法2　与证明一类似，可设 $AB < AC$，只须证 N, I, S 共线．现在设 P 为 NK 与 $\triangle BCN$ 的外接圆的交点（不同于 N）．则 $SP = SN$，于是，$\angle SPN = \angle SNP$，而 $IN = IK$，故 $\angle IKN = \angle INK$，从而 N, I, S 共线的充要条件是这些角相等，即 $IK \parallel SP$．注意到 $IK \perp BC$，故只须证明 $SP \perp BC$，即证 P 为弧 BC 的中点．为此，我们证明 NKP 平分 $\angle BNC$，即证 $\frac{BN}{CN} = \frac{BK}{KC}$．

记 $\angle MKD = \varphi$，由余弦定理，得

$$BN^2 = BK^2 + NK^2 - 2NK \cdot BK \cdot \cos \varphi$$
$$CN^2 = CK^2 + NK^2 + 2NK \cdot CK \cdot \cos \varphi$$

于是，只须证明

$$\frac{BK^2}{CK^2} = \frac{BK^2 + NK^2 - 2NK \cdot BK \cdot \cos \varphi}{CK^2 + NK^2 + 2CK \cdot NK \cdot \cos \varphi}$$

即证

$$(CK - BK)NK = 2BK \cdot CK \cdot \cos \varphi$$

由于 $NK = 2r \cdot \sin \varphi$，故只须证明

$$2r(CK - BK)\tan \varphi = 2BK \cdot CK$$

而

$$\tan \varphi = \frac{MD}{DK} = \frac{\frac{1}{2}AD}{DK} = \frac{c \cdot \sin B}{2(s - b - c \cdot \cos B)}$$

（因为 M 为 AD 的中点），现在

$$BK = r \cdot \cot \frac{B}{2}, CK = r \cdot \cot \frac{C}{2}$$

故只须证明

$$\frac{\left(\cot \frac{C}{2} - \cot \frac{B}{2}\right)(c \cdot \sin B)}{a + c - b - 2c \cdot \cos B} = \cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}$$

利用正弦定理及 $a = c \cdot \cos B + b \cdot \cos C$，转为证明

$$\sin C \cdot \sin B\left(\cot \frac{C}{2} - \cot \frac{B}{2}\right) =$$
$$\cot \frac{B}{2} \cdot \cot \frac{C}{2}(\sin C - \sin B + \sin B \cdot \cos C - \sin C \cdot \cos B)$$

利用半角公式，两边约去 $\sin \frac{B-C}{2}$，只须证

$$\sin B \cdot \sin C = 4\sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{B}{2} \cdot \cos \frac{C}{2}$$

上式显然成立.所以,命题获证.

57 AB 为等腰 $\triangle ABC$ 的底边,CD 是其一条高.P 为 CD 上一点,E 为 AP 与 BC 的交点,F 是 BP 与 AC 的交点.若 $\triangle ABP$ 的内切圆与四边形 $PECF$ 的内切圆半径相等.求证:$\triangle ADP$ 的内切圆与 $\triangle BCP$ 的内切圆半径相等.

(2003 年中国国家队培训题)

证明 如图 76,作 $\triangle ABP$ 与四边形 $PECF$ 内切圆的公切线,分别交 AB,BF,BC 于点 Y,X,G,由对称性可知上述两个内切圆的圆心在 CD 上,从而 $XY\perp AB$,即有 $GY\parallel CD$.

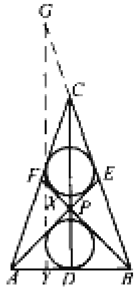


图 76

分别记 $\triangle ADP$,$\triangle BCP$,$\triangle APB$ 的内切圆半径为 r_1,r_2,r,则由 $CD\parallel GY$,可知 $\triangle BPC\backsim\triangle BXG$,故 $\frac{r_2}{r}=\frac{BP}{BX}$,又 $\triangle BPD$ 与 $\triangle ADP$ 的内切圆半径相等,于是,由 $\triangle BPD\backsim\triangle BXY$,可知 $\frac{r_1}{r}=\frac{BP}{BX}$.综上可知 $\frac{r_1}{r}=\frac{r_2}{r}$,$r_1=r_2$.

58 圆 S_1 和 S_2 交于点 A 和 B,过 A 的一直线分别交 S_1,S_2 于点 C,D.M,N,K 分别为 CD,BC 和 BD 上的点,使得 $MN\parallel BD$,$MK\parallel BC$.E,F 分别为 S_1 中弧 BC 和 S_2 中弧 BD(都不含点 A)上的点,E 到 BC 的射影为 N,F 到 BD 的射影为 K.求证:$\angle EMF=90°$.

(2003 年中国国家队培训题)

证明 先证明一个引理:$\triangle P_1Q_1R_1$ 与 $\triangle P_2Q_2R_2$ 中(图 77),$\angle P_1Q_1R_1=\angle P_2Q_2R_2$,$T_1$,$T_2$ 分别为 Q_1 到 P_1R_1 的射影和 Q_2 到 P_2R_2 的射影,且 $\frac{P_1T_1}{T_1R_1}=\frac{P_2T_2}{T_2R_2}$,则 $\triangle P_1Q_1R_1\backsim\triangle P_2Q_2R_2$.

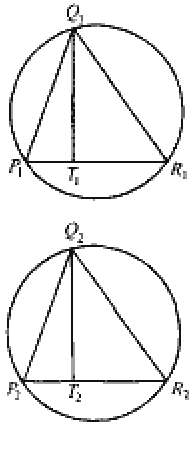


图 77

引理的证明:固定 $\triangle P_1Q_1R_1$,在 $\triangle P_2Q_2R_2$ 的外接圆上存在唯一一点 Q_2',使得 $\triangle P_1Q_1R_1\backsim\triangle P_2Q_2'R_2$,并设 T_2' 为 Q_2' 到 P_2R_2 的射影,则由 $\triangle P_1Q_1R_1\backsim\triangle P_2Q_2'R_2$ 可知 $\frac{P_1T_1}{T_1R_1}=\frac{P_2T_2'}{T_2'R_2}$.这表明 $T_2'=T_2$,从而 $Q_2'=Q_2$.引理获证.

现在回到原题,我们有 $\frac{BN}{NC}=\frac{DM}{MC}$(因为 $MN\parallel BD$)$=\frac{DK}{KB}$(因为 $MK\parallel BC$).

如图 78,设 FK 交圆 S_2 于另一点 Q,则 $\angle BQD=\angle BAD=\angle BEC$.这样,由引理,可知 $\triangle BQD\backsim\triangle CEB$,故 $\angle EBC=\angle QDB=$

$\angle QFB$,从而 $Rt\triangle BKF \backsim Rt\triangle ENB$.

由于 $MKBN$ 为平行四边形,故 $\angle MNB = \angle MKB$,于是

$$\angle MNE = \angle MKF$$

$$\frac{MN}{KF} = \frac{BK}{KF} = \frac{EN}{NB} = \frac{EN}{MK}$$

(这里用到 $\triangle BKF \backsim \triangle ENB$),所以,$\triangle MNE \backsim \triangle FKM$,故 $\angle NME = \angle KFM$,结合 $MN \perp FK$,可知 $EM \perp FM$,从而 $\angle EMF = 90°$.

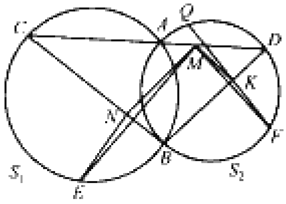


图 78

59 设 $ABCD$ 是一个圆内接四边形,点 P,Q 和 R 分别是 D 到直线 BC,CA 和 AB 的射影. 证明:$PQ = QR$ 的充要条件是 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$ 的角平分线的交点在 AC 上.

(2003 年国际数学奥林匹克)

证明 如图 79,由西姆松(Simson)定理,可知 P,Q,R 三点共线. 而 $\angle DPC = \angle DQC = 90°$,故 D,P,C,Q 四点共圆,于是,$\angle DCA = \angle DPQ = \angle DPR$. 类似地,由于 D,Q,R,A 共圆,可知 $\angle DAC = \angle DRP$. 因此,$\triangle DCA \backsim \triangle DPR$.

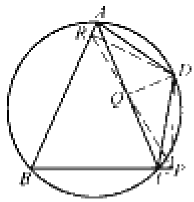


图 79

类似地,$\triangle DAB \backsim \triangle DQP$,$\triangle DBC \backsim \triangle DRQ$. 因此

$$\frac{DA}{DC} = \frac{DR}{DP} = \frac{DB \cdot \frac{QR}{BC}}{DB \cdot \frac{PQ}{BA}} = \frac{QR}{PQ} \cdot \frac{BA}{BC}$$

从而 $PQ = QR$ 的充要条件是

$$\frac{DA}{DC} = \frac{BA}{BC}$$

而 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$ 的角平分线分 AC 的比分别为 $\frac{BA}{BC}$ 和 $\frac{DA}{DC}$. 所以,命题成立.

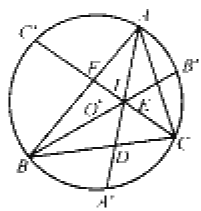


图 80

60 如图 80,圆 O 是 $\triangle ABC$ 的外接圆,点 I 是 $\triangle ABC$ 的内心,射线 AI,BI,CI 各交对边于点 D,E,F,射线 AD,BE,CF 各交圆 O 于点 A',B',C'. 求证:$AA' \cdot ID = BB' \cdot IE = CC' \cdot IF$.

(2002 年安徽省高中数学竞赛)

证明 如图 81,过 A' 作圆 O 的直径 $A'G$,联结 GA,过 I 作 $IK \perp BC$ 于 K. 设圆 O 的半径为 R,$\triangle ABC$ 内切圆半径为 r,则 $A'G = 2R$,$IK = r$.

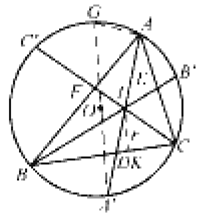


图 81

因为 I 是 $\triangle ABC$ 的内心,所以 $\angle BAA' = \angle CAA'$. 所以 $\overset{\frown}{A'B} = \overset{\frown}{A'C}$,所以 $A'G \perp BC$.

又 $IK \perp BC$，所以 $IK \parallel A'G$. 从而可知，$Rt\triangle IDK \backsim Rt\triangle A'GA$. 所以$\frac{ID}{A'G} = \frac{IK}{AA'}$，即

$$AA' \cdot ID = A'G \cdot IK = 2Rr$$

同理可证 $BB' \cdot IE = 2Rr, CC' \cdot IF = 2Rr$

故 $AA' \cdot ID = BB' \cdot IE = CC' \cdot IF$

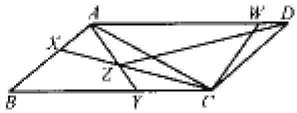


图 82

61 $\triangle ABC$ 中，X 是 AB 上的一点，Y 是 BC 上的一点，线段 AY 和 CX 相交于点 Z. 假如 $AY = YC$ 及 $AB = ZC$，求证：B,X,Z 和 Y 四点共圆.

（2003 年世界城际间联赛）

证明 首先，可以证明 $CY = AY < CZ = AB$. 事实上，若 $\angle AYC \geqslant 90°$，则 $CZ > CY$；若 $\angle AYC < 90°$，则 $\angle AYB > 90°$，从而 $AB > AY$.

如图 82，构造平行四边形 $ABCD$，并在 AD 边上取一点 W，使得 $\angle WCY = \angle AYC$，则

$$CY = CW, CZ = AB = CD$$

且 $\angle AYC = \angle WCY = \angle DWC$

因为

$$AB > AY, \triangle ZYC \cong \triangle DWC$$

所以 $\angle AYC = \angle WCY = \angle DCZ$

于是 $\triangle YAC \backsim \triangle DZC$. 故 $\angle ZAC = \angle ZDC$. 因此，A,D,C,Z 共点共圆. 故

$$\angle XBY + \angle XZY = \angle ADC + \angle AZC = 180°$$

则 B,X,Z,Y 四点共圆.

62 P 为圆 O 外一点，过 P 作圆 O 的两条切线，切点分别为 A,B. 设 Q 为 PO 与 AB 的交点，过 Q 作圆 O 的任意一条弦 CD. 证明：$\triangle PAB$ 与 $\triangle PCD$ 有相同的内心.

（2001 年中国西部数学奥林匹克）

证明 如图 83，记 R 为线段 OP 与圆 O 的交点，E 为 PD 与圆 O 的交点（不同于 D）.

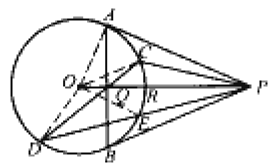


图 83

因为

$$CQ \cdot QD = AQ \cdot QB = AQ^2, PQ \cdot QO = AQ^2$$

所以 $CQ \cdot QD = PQ \cdot QO$

于是，P,C,O,D 四点共圆.

故 $\angle OPC=\angle ODC=\angle OCD=\angle OPD$，即 PO 为 $\angle CPD$ 的平分线.

又 $\angle COR=\angle CDE$，而 $\angle COE=2\angle CDE$，故 $\angle COR=\angle ROE$，即有 $\overset{\frown}{CR}=\overset{\frown}{RE}$. 从而，$\angle CDR=\angle EDR$. 故 R 为 $\triangle PCD$ 的内心.

又显然 R 为 $\triangle PAB$ 的内心，所以命题成立.

63 设 R,r 分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆半径和内切圆半径，R'，r' 分别是 $\triangle A'B'C'$ 的外接圆半径和内切圆半径. 证明：若 $\angle C=\angle C'$，$Rr'=R'r$，则 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

（第 12 届韩国数学奥林匹克）

证明 因为 $\angle C=\angle C'$，$R=\dfrac{c}{2\sin C}$，$R'=\dfrac{c'}{2\sin C'}$，所以 $cr'=c'r$，有 $\dfrac{c}{r}=\dfrac{c'}{r'}$，即

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}=\cot\frac{A'}{2}+\cot\frac{B'}{2}$$

设 $\dfrac{\angle A}{2}=\angle 1$，$\dfrac{\angle B}{2}=\angle 2$，$\dfrac{\angle A'}{2}=\angle 3$，$\dfrac{\angle B'}{2}=\angle 4$. 则

$$\frac{\cos\angle 1}{\sin\angle 1}+\frac{\cos\angle 2}{\sin\angle 2}=\frac{\cos\angle 3}{\sin\angle 3}+\frac{\cos\angle 4}{\sin\angle 4}$$

$$\frac{\sin(\angle 1+\angle 2)}{\sin\angle 1\cdot\sin\angle 2}=\frac{\sin(\angle 3+\angle 4)}{\sin\angle 3\cdot\sin\angle 4}$$

因为

$$\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4$$

所以
$$\sin\angle 1\cdot\sin\angle 2=\sin\angle 3\cdot\sin\angle 4$$

即
$$\cos(\angle 1+\angle 2)-\cos(\angle 1-\angle 2)=\cos(\angle 3+\angle 4)-\cos(\angle 3-\angle 4)$$

得
$$\cos(\angle 1-\angle 2)=\cos(\angle 3-\angle 4)$$

有 $\angle 1-\angle 2=\angle 3-\angle 4$，或 $\angle 1-\angle 2=\angle 4-\angle 3$.

又 $\angle 1+\angle 2=\angle 3+\angle 4$，于是 $\angle A=\angle A'$ 或 $\angle A=\angle B'$.

故 $\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

64 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B$ 内的旁切圆与 CA 相切于 D，$\angle C$ 内的旁切圆与 AB 相切于 E，过 DE 和 BC 的中点 M 和 N 作一直线. 求证：直线 MN 平分 $\triangle ABC$ 的周长，且与 $\angle A$ 的角平分线平行.

（1999 年世界城际间联赛）

证明　如图 84，过 N 作 $D'E' \underline{\underline{/\!/}} DE$，使 N 是 $D'E'$ 中点，则 $DD' \underline{\underline{/\!/}} EE' \underline{\underline{/\!/}} MN$. 又因为

$$BE = \frac{1}{2}(AB + AC - BC) = CD$$

且 $BE' \underline{\underline{/\!/}} CD'$，所以 $\triangle BEE' \cong \triangle CDD'$，有 $\angle BEE' = \angle CDD'$.

又因为 $\angle BEE' + \angle CDD' = \angle A$，所以 MN 平行于 $\angle A$ 的角平分线.

设 $\angle A$ 的角平分线交 BC 于 F，且设 $AC \geqslant AB$，NM 交 CA 于 G，$\triangle ABC$ 三边长分别为 a,b,c. 则

$$CN = \frac{a}{2}, CF = \frac{ab}{b+c}$$

由于 $NG /\!/ FA$，有 $\frac{CG}{CA} = \frac{CN}{CF}$，即

$$CG = \frac{b \cdot \frac{a}{2}}{\frac{ab}{b+c}} = \frac{b+c}{2}$$

故 NG 平分 $\triangle ABC$ 的周长.

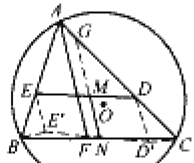


图 84

65　如图 85，$ABCD$ 是圆内接四边形，AC 是圆的直径，$BD \perp AC$，AC 与 BD 的交点为 E，F 在 DA 的延长线上，联结 BF，G 在 BA 的延长线上，$DG /\!/ BF$，H 在 GF 的延长线上，$CH \perp GF$. 证明：B,E,F,H 四点共圆.

（2003 年中国女子数学奥林匹克）

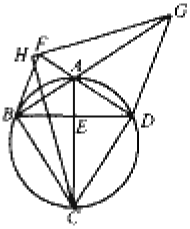


图 85

证明　如图 86，联结 BH，EF，CG，因为 $\triangle BAF \backsim \triangle GAD$，所以

$$\frac{FA}{AB} = \frac{DA}{AG} \qquad ①$$

又因为 $\triangle ABE \backsim \triangle ACD$，所以

$$\frac{AB}{EA} = \frac{AC}{DA}, \qquad ②$$

① × ② 得

$$\frac{FA}{EA} = \frac{AC}{AG}$$

因为 $\angle FAE = \angle CAG$，所以 $\triangle FAE \backsim \triangle CAG$，于是 $\angle FEA = \angle CGA$.

由题设知，$\angle CBG = \angle CHG = 90°$，所以 B,C,G,H 四点共圆，得 $\angle BHC = \angle BGC$. 于是

$$\begin{aligned}\angle BHF + \angle BEF &= \angle BHC + 90° + \angle BEF = \\ &\angle BGC + 90° + \angle BEF = \\ &\angle FEA + 90° + \angle BEF = 180°\end{aligned}$$

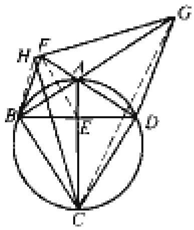


图 86

所以 B,E,F,H 四点共圆.

66 设点 D 为等腰 $\triangle ABC$ 的底边 BC 上一点，F 为过 A,D,C 三点的圆在 $\triangle ABC$ 内的弧上一点，过 B,D,F 三点的圆与边 AB 交于点 E.求证：$CD\cdot EF+DF\cdot AE=BD\cdot AF$.

（2004 年中国东南地区数学奥林匹克）

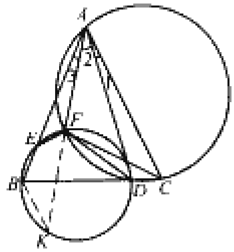


图 87

证明　如图 87，设 AF 的延长线交圆 BDF 于 K. 因为 $\angle AEF=\angle AKB$，所以 $\triangle AEF\backsim\triangle AKB$，因此 $\frac{EF}{AF}=\frac{BK}{AB},\frac{AE}{AF}=\frac{AK}{AB}$. 于是只须证明

$$CD\cdot BK+DF\cdot AK=BD\cdot AB \qquad ①$$

又注意到 $\angle KBD=\angle KFD=\angle C$

我们有 $S_{\triangle DCK}=\frac{1}{2}CD\cdot BK\cdot\sin C$

$$S_{\triangle ADK}=\frac{1}{2}AK\cdot DF\cdot\sin C$$

同理 $S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}BD\cdot AB\cdot\sin C$

因此要证 ①，只须证明

$$S_{\triangle ABD}=S_{\triangle DCK}+S_{\triangle ADK} \qquad ②$$

而

$$②\Leftrightarrow S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AKC}\Leftrightarrow BK\parallel AC \qquad ③$$

事实上由 $\angle KBD=\angle C$ 知 ③ 成立，得证.

67 凸四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形，其中 $\angle A=60^\circ$，$BC=CD=1$，射线 AB,DC 相交于 E，射线 BC,AD 相交于 F. 已知 $\triangle BCE$ 及 $\triangle CDF$ 的周长都是整数. 求四边形 $ABCD$ 的周长.

（2004 年中国国家集训队测试题）

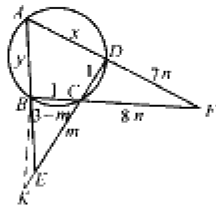


图 88

解　如图 88，由 $\angle ABC+\angle ADC=180^\circ\Rightarrow\angle EBC+\angle FDC=180^\circ$. 易断 $\angle EBC\neq 90^\circ$. 否则，$\angle EBC=90^\circ$. 因 $\angle ECB=\angle A=60^\circ$，$BC=1$，则

$$\text{Rt}\triangle BCE \text{ 的周长}=1+2+\sqrt{3}=3+\sqrt{3}$$

与已知矛盾.

从而可断 $\angle EBC,\angle FDC$ 中，一为锐角，一为钝角.

不妨设 $\angle EBC<90^\circ$，作 $BK\perp BC$，K 在射线 CE 上. 易得 $BK+KC=2+\sqrt{3}$.

在 $\triangle BCE$ 中

$$\angle EBC = \angle EBF > \angle A = 60°, \angle BCE = \angle A = 60°$$

所以 $\angle BEC < 60°$，从而有

$$EC > BE > BC = 1, BE + EC > 2$$

又易断 $BE + EC < BK + KC$，所以

$$2 < BE + EC < 2 + \sqrt{3}$$

因为 $\triangle BCE$ 周长为整数，而 $BC = 1$. 所以 $BE + EC$ 必为整数，可断 $BE + EC = 3$. 设 $EC = m$，则 $BE = 3 - m$，注意 $\angle ECB = 60°$，所以

$$(3-m)^2 = BE^2 = BC^2 + EC^2 - 2BC \cdot EC \cdot \cos\angle ECB =$$

$$1^2 + m^2 - 2 \cdot 1 \cdot m \cdot \frac{1}{2} = 1 + m^2 - m$$

解得 $$EC = m = \frac{8}{5}, BE = 3 - m = \frac{7}{5}$$

此时 $\frac{CF}{DF} = \frac{\sin\angle CDF}{\sin\angle DCF} = \frac{\sin\angle CBE}{\sin\angle BCE} = \frac{EC}{BE} = \frac{8}{5} / \frac{7}{5} = \frac{8}{7}$

令 $CF = 8n, DF = 7n$，则

$$(7n)^2 = DF^2 = CF^2 + CD^2 - 2CF \cdot CD \cdot \cos\angle DCF =$$

$$(8n)^2 + 1^2 - 2 \cdot 8n \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = (8n)^2 + 1 - 8n$$

解得 $n = \frac{1}{5}$ 或 $\frac{1}{3}$，$CF = 8n = \frac{8}{5}$ 或 $\frac{8}{3}$.

若 $CF = \frac{8}{5} = CE$，将导致 $\triangle CDF \cong \triangle CBE \Rightarrow \angle EBC = \angle FDC = 90°$，与已知矛盾. 所以 $CF = \frac{8}{3}, DF = \frac{7}{3}$.

设 $AD = x, AB = y$，由 $\triangle ECB \backsim \triangle EAD \Rightarrow \frac{EC}{EA} = \frac{CB}{AD}$，即 $\dfrac{\frac{8}{5}}{\frac{7}{5} + y} = \frac{1}{x}$，所以

$$\frac{8}{5}x = \frac{7}{5} + y \qquad ①$$

由 $\triangle FCD \backsim \triangle FAB \Rightarrow \frac{FC}{FA} = \frac{CD}{AB}$，即 $\dfrac{\frac{8}{3}}{\frac{7}{3} + x} = \frac{1}{y}$，所以

$$\frac{8}{3}y = \frac{7}{3} + x \qquad ②$$

解联立方程①，②，得 $x = \frac{13}{7}, y = \frac{11}{7}$.

所以

四边形 $ABCD$ 周长 $= AD + AB + BC + CD = x + y + 1 + 1 =$

$$\frac{13}{7} + \frac{11}{7} + 2 = \frac{38}{7}$$

68 以锐角 $\triangle ABC$ 的两边 AB，AC 为直径向 $\triangle ABC$ 外各作一个半圆，$AH \perp BC$ 交 BC 于 H，点 D 是边 BC 上任意一点（不是端点），过点 D 作 $DE \parallel AC$，$DF \parallel AB$，分别交两个半圆于点 E，F．求证：D，E，F，H 四点共圆．

（2004 年中国国家集训队测试题）

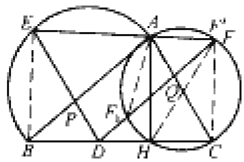


图 89

证法 1 如图89，设 DE 与 AB 交于点 P，DF 与 AC 交于点 Q．将以 AC 为直径的半圆补成圆，并设 DF 和它的另一个交点为 F_1，联结 AF_1，BE，CF．因为

$$\frac{AP}{BP}=\frac{CD}{DB}=\frac{CQ}{QA}$$

所以 P，Q 是半圆 AEB 和半圆 CF_1A 中位于相同位置的点．

又因为 $\angle APE=\angle BAC=\angle CQF_1$，所以 PE，QF_1 是上述两个半圆中处于相同位置的线段，因此 $\triangle BPE \backsim \triangle AQF_1$，所以 $\angle BEP=\angle AF_1Q$．由此

$$\angle BAC=\angle APE=\angle ABE+\angle BEP=\angle ABE+\angle AF_1Q=\angle ABE+\angle ACF$$

即

$$\angle BAC=\angle ABE+\angle ACF \quad ①$$

另一方面，由 A，E，B，H 四点共圆及 A，F，C，H 四点，共圆知

$$\angle EHF=\angle EHA+\angle AHF=\angle ABE+\angle ACF \quad ②$$

由①，②便得 $\angle EDF=\angle BAC=\angle EHF$，从而 D，E，F，H 四点共圆．

证法 2 延长 EA 交 DF 于 F'，联结 $F'H$．则 $\angle F'EH=\angle ABC=\angle F'DH$，所以 E，D，H，F' 四点共圆，$\angle EDB=\angle EF'H=\angle AF'H$．

又因为 $\angle EDB=\angle ACH$，所以 $\angle AF'H=\angle ACH$，因此 A，H，C，F' 共圆．

又因为 A，H，C，F 共圆，D，F，F' 共线，于是 $F=F'$，所以 D，E，H，F 四点共圆．

69 圆心为 O_1 和 O_2 的两个半径相等的圆相交于 P,Q 两点，O 是公共弦 PQ 的中点，过 P 任作两条割线 AB 和 CD（AB,CD 均不与 PQ 重合），点 A,C 在圆 O_1 上，点 B,D 在圆 O_2 上，联结 AD 和 BC，点 M,N 分别是 AD,BC 的中点，已知 O_1 和 O_2 不在两圆的公共部分内，点 M,N 均不与点 O 重合．求证：M,N,O 三点共线．

（2004 年中国国家集训队测试题）

证明　联结 O_1O_2，则 O_1O_2 的中点也是 O．

先证一个引理：两圆相交于点 P,Q，AB 是过 P 的任一条割线，T 是 AB 的中点，O 是两圆的连心线 O_1O_2 的中点，则 $OP=OT$．

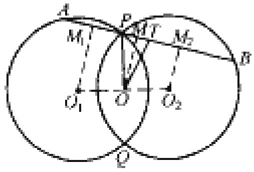


图 90

引理的证明：事实上，如图 90 所示，作点 O_1,O_2,O 在 AB 上的射影 M_1,M_2,M．

由垂径定理知，M_1,M_2 分别是 AP,BP 的中点．又由梯形的中位线定理知点 M 为 M_1M_2 的中点．

不妨设 $PB\geqslant PA$，则

$$PM=M_1M-M_1P=\frac{M_1M_2}{2}-\frac{PA}{2}=\frac{PA+PB}{4}-\frac{PA}{2}=\frac{PB-PA}{4}$$

$$MT=AT-PA-PM=\frac{PA+PB}{2}-PA-\frac{PB-PA}{4}=\frac{PB-PA}{4}$$

所以 $PM=MT$，即 M 为 PT 的中点．

从而 $OP=OT$，引理得证．

下面回到原题．

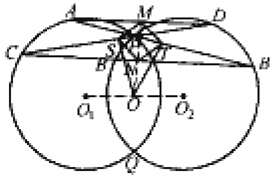


图 91

取割线 AB,CD 的中点 T,S．如图 91 所示．由引理知 $OP=OS,OP=OT$．所以 $\triangle OST$ 是等腰三角形，即 O 在线段 ST 的垂直平分线上．又

$$\overset{\frown}{AC}=\frac{1}{2}\angle APC=\frac{1}{2}\angle BPD=\overset{\frown}{BD}$$

所以 $AC=BD$．而

$$SN \mathrel{\underset{=}{/\!/}} \frac{1}{2}BD,MT \mathrel{\underset{=}{/\!/}} \frac{1}{2}BD,NT \mathrel{\underset{=}{/\!/}} \frac{1}{2}AC,MS \mathrel{\underset{=}{/\!/}} \frac{1}{2}AC$$

故 $MSNT$ 为菱形，它的对角线互相垂直平分，即 M,N 也在线段 ST 的垂直平分线上．

综上可知，M,N,O 三点共线．

⑦⓪ 求实数 λ 的最大值，使得只要点 P 在锐角 $\triangle ABC$ 内部，$\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA$，射线 AP,BP,CP 分别交 $\triangle PBC$，$\triangle PCA$，$\triangle PAB$ 的外接圆于 A_1,B_1,C_1，就有 $S_{\triangle A_1BC}+S_{\triangle B_1CA}+S_{\triangle C_1AB}\geqslant \lambda S_{\triangle ABC}$.

（2004 年中国国家集训队测试题）

解 如图 92，设 $AA_1\cap BC=A_2$，由 $\angle PAB=\angle PBC=\angle PA_1C$ 知 $AB\ /\!/\ A_1C$. 于是

$$\triangle A_1A_2C\backsim\triangle AA_2B$$

$$\frac{S_{\triangle A_1BC}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{A_1A_2}{AA_2}=\frac{CA_2}{BA_2}$$

同理，记 $B_2=BB_1\cap CA$，$C_2=CC_1\cap AB$，则

$$\frac{S_{\triangle B_1CA}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{AB_2}{CB_2},\frac{S_{\triangle C_1AB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{BC_1}{AC_1}$$

所以，由平均不等式及塞瓦定理可得

$$\frac{S_{\triangle A_1BC}+S_{\triangle B_1CA}+S_{\triangle C_1AB}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{CA_2}{BA_2}+\frac{AB_2}{CB_2}+\frac{BC_1}{AC_1}\geqslant$$

$$3\sqrt[3]{\frac{AB_2}{B_2C}\cdot\frac{CA_2}{A_2B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}}=3$$

当 $\triangle ABC$ 为正三角形，P 为其中心时

$$\angle PAB=\angle PBC=\angle PAC=30^\circ$$

且 $$A_2B=A_2C,B_2A=B_2C,C_2A=C_2B$$

此时不等式等号成立.

综上所述，$\lambda_{\max}=3$.

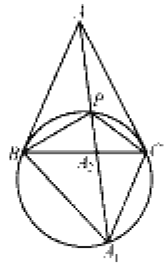


图 92

⑦① 设 $\angle XOY=90^\circ$，P 为 $\angle XOY$ 内的一点，且 $OP=1$，$\angle XOP=30^\circ$，过点 P 任意作一条直线分别交射线 OX,OY 于点 M,N，求 $OM+ON-MN$ 的最大值.

（2004 年中国国家队选拔赛试题）

解 先过点 P 作一圆 O_1，与射线 OX,OY 相切于点 A,B，且使点 P 在优弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上，如图 93 所示.

建立如图 93 所示的直角坐标系，由条件易知点 P 的坐标为 $\left(\frac{\sqrt3}{2},\frac12\right)$；而 O_1 的坐标为 (a,a)，其中 a 满足

$$\left(\frac{\sqrt3}{2}-a\right)^2+\left(\frac12-a\right)^2=a^2$$

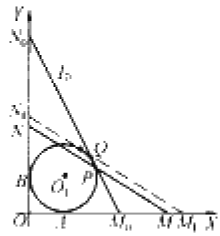


图 93

即 $$a=\frac{\sqrt{3}+1-\sqrt[4]{12}}{2}\text{(取较小根)}$$

因为 $30^\circ<45^\circ$，且点 P 的纵坐标 $\frac{1}{2}>a$，故过点 P 并与圆 O_1 相切的直线 l_0（这是一条定直线）与 OX，OY 都相交. 设 l_0 与 OX，OY 的交点分别为 M_0，N_0. 易知

$$OM_0+ON_0-M_0N_0=2OA$$

若 l 不与圆 O_1 相切（则与圆 O_1 相交），作圆 O_1 的切线 l_1（切点为 Q），使得 $l_1 /\!/ l$，并使点 Q 与 O 分居直线 l 的两侧，记 l_1 与 OX，OY 的交点分别为 M_1，N_1，则由折线 N_1NMM_1 长大于 M_1N_1 长，及切线长定理，得到

$$\begin{aligned}OM+ON-MN<OM_1+ON_1-M_1N_1=\\(OB+BN_1)+(OA+AM_1)-\\(N_1Q+QM_1)=2OA\end{aligned}$$

因此，当过点 P 的直线 l 与圆 O_1 相切时，$OM+ON-MN$ 取得最大值，最大值为

$$2OA=2a=\sqrt{3}+1-\sqrt[4]{12}$$

72 设 $\triangle ABC$ 的半周长和内切圆半径分别为 s 和 r，以三条边长 BC，CA，AB 为直径向 $\triangle ABC$ 的外部作三个半圆，记与这三个半圆都相切的圆的半径为 t，证明

$$\frac{s}{2}<t\leqslant\frac{s}{2}+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)r$$

（2004年中国国家队培训题）

证明 如图94，设 AB，BC，CA 的中点分别为 D，E，F. 设 $AB=c$，$BC=a$，$CA=b$，记

$$d=\frac{s}{2}-\frac{c}{2},e=\frac{s}{2}-\frac{b}{2}$$

$$f=\frac{s}{2}-\frac{a}{2},g=t-\frac{s}{2}$$

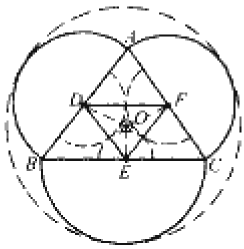


图 94

分别以 D，E，F 为圆心，d，e，f 为半径作圆，易知此三圆两两外切，设与此三圆均外切的圆的圆心为 O，半径为 g'，则

$$g'+d+\frac{c}{2}=g'+\frac{s}{2}=g'+e+\frac{b}{2}=g'+f+\frac{a}{2}$$

可知 $$g=g'=t-\frac{s}{2}$$

因此 $t-\frac{s}{2}>0$，所以 $t>\frac{s}{2}$. 如图94所示，有

$$OE=g+e,OD=g+d,DE=e+d$$

所以 $$S_{\triangle ODE}=\sqrt{deg(d+e+g)}$$

同理
$$S_{\triangle OEF}=\sqrt{efg(e+f+g)}$$
$$S_{\triangle ODF}=\sqrt{dfg(d+f+g)}$$
$$S_{\triangle DEF}=\sqrt{def(d+e+f)}$$
所以
$$\sqrt{def(d+e+f)}=\sqrt{deg(d+e+g)}+\sqrt{efg(e+f+g)}+\sqrt{dfg(d+f+g)} \quad ①$$

下面证明
$$g=\frac{def}{de+ef+fd+2\sqrt{def(d+e+f)}}$$
由于式 ① 右端关于 g 是单调递增，故至多有一个 g 满足 ①. 故只要检验
$$g=\frac{def}{de+ef+fd+2\sqrt{deg(d+e+f)}}$$
满足 ① 即可.
$$\sqrt{deg(d+e+g)}=$$
$$\sqrt{\frac{de\cdot def}{de+ef+fd+2\sqrt{def(d+e+f)}}\left[d+e+\frac{def}{de+ef+fd+2\sqrt{def(d+e+f)}}\right]}=$$
$$\frac{de\sqrt{f}\sqrt{(d+e+f)de+f(d+e)^2+2(d+e)\sqrt{def(d+e+f)}}}{de+ef+fd+2\sqrt{def(d+e+f)}}=$$
$$\frac{de\sqrt{f}\left[\sqrt{(d+e+f)de}+\sqrt{f(d+e)^2}\right]}{de+ef+fd+2\sqrt{def(d+e+f)}}=$$
$$\frac{de\sqrt{def(d+e+f)}+def(d+e)}{de+ef+fd+2\sqrt{def(d+e+f)}}$$
同理
$$\sqrt{dfg(d+f+g)}=\frac{df\sqrt{def(d+e+f)}+def(d+f)}{de+ef+fd+2\sqrt{def(d+e+f)}}$$
$$\sqrt{efg(e+f+g)}=\frac{ef\sqrt{def(d+e+f)}+def(e+f)}{de+ef+fd+2\sqrt{def(d+e+f)}}$$
因而有
$$\sqrt{deg(d+e+g)}+\sqrt{dfg(d+f+g)}+\sqrt{efg(e+f+g)}=$$
$$\frac{\sqrt{def(d+e+f)}\left[de+ef+fd+2\sqrt{def(d+e+f)}\right]}{de+ef+fd+2\sqrt{def(d+e+f)}}=$$
$$\sqrt{def(d+e+f)}$$
从而有
$$g=\frac{def}{de+ef+fd+2\sqrt{def(d+e+f)}}$$

而
$$\frac{r}{2}=\frac{2S_{\triangle DEF}}{s},s=2(d+e+f)$$

所以
$$\frac{r}{2}=\frac{\sqrt{def(d+e+f)}}{d+e+f}=\sqrt{\frac{def}{d+e+f}}$$

所以
$$\frac{r}{2g}=\frac{\sqrt{\frac{def}{d+e+f}}\left[de+ef+fd+2\sqrt{def(d+e+f)}\right]}{def}=$$
$$2+(de+ef+fd)\sqrt{\frac{1}{def(d+e+f)}}$$

而
$$(de+ef+fd)^2\geqslant 3def(d+e+f)$$

所以
$$de+ef+fd\geqslant\sqrt{3}\sqrt{def(d+e+f)}$$

所以
$$\frac{r}{2g}\geqslant 2+\sqrt{3}$$

所以
$$g\leqslant\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)r$$

故
$$g=t-\frac{s}{2}\leqslant\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)r$$

即
$$t\leqslant\frac{s}{2}+\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)r$$

73 P 是 $\triangle ABC$ 内一点，点 P 在三条边 BC,CA,AB 上的射影分别为 D,E,F，且满足

$$AP^2+PD^2=BP^2+PE^2=CP^2+PF^2$$

记 I_A,I_B,I_C 为 $\triangle ABC$ 的旁切圆圆心，证明：点 P 为 $\triangle I_AI_BI_C$ 的外接圆圆心.

（2004 年中国国家队培训题）

证明 如图 95，设 I_A,I_B,I_C 在 BC,CA,AB 上的射影分别为 D',E',F'，并设 AB,BC,CA 的长分别为 c,a,b，则可知

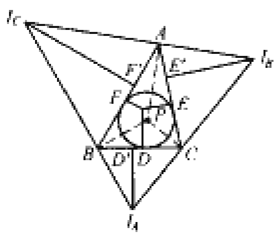


图 95

$$AE'=BD'=\frac{a+b+c}{2}-c=\frac{a+b-c}{2}$$

$$BF'=CE'=\frac{a+b+c}{2}-a=\frac{b+c-a}{2}$$

$$AF'=CD'=\frac{a+b+c}{2}-b=\frac{a+c-b}{2}$$

另由条件可知

$$AP^2-PF^2=CP^2-PD^2$$

所以 $AF^2=CD^2$，于是 $AF=CD$.

同理可知 $AE=BD,CE=BF$.

设 $AF=CD=x,AE=BD=y,CE=BF=z$，则

$$x+z=c,y+x=a,y+z=b$$

可得 $x=\frac{a+c-b}{2}, y=\frac{b+a-c}{2}, z=\frac{b+c-a}{2}$

所以 $AF=AF', AE=AE', BD=BD'$

所以 F, F'；E, E'；D, D' 分别重合.

故 $PI_C\perp AB, PI_B\perp AC, PI_A\perp BC$.

又因为 $\angle CBI_A=\angle ABI_C$，$I_A, B, I_C$ 共线，所以 $\angle PI_CI_A=\angle PI_AI_C=90°-\angle I_ABC$，所以 $PI_A=PI_C$.

同理 $PI_B=PI_A$，所以 $PI_A=PI_B=PI_C$.

即 P 为 $\triangle I_AI_BI_C$ 的外心.

74 证明：如果两个三角形有相同的外接圆，那么它们的内切圆不可能一个严格包含另一个.

（2004 年中国国家队培训题）

证明 设 $\triangle_1$ 和 $\triangle_2$ 分别是圆 $C(O,R)$ 的两个不同的内接三角形，其内切圆分别为 $C_1(I_1,r_1)$ 和 $C_2(I_2,r_2)$，且 C_2 严格包含于 C_1.

因为由欧拉公式知

$$OI_1^2=R^2-2Rr_1<R^2$$
$$OI_2^2=R^2-2Rr_2<R^2$$

所以 I_1, I_2 在 C 内部.

因为两个圆一个包含另一个，所以 $I_1I_2<|r_1-r_2|$.

而在 $\triangle OI_1I_2$ 中，有如下不等式（即使是退化的三角形也成立）

$$I_1I_2\geqslant|OI_1-OI_2|=|\sqrt{R^2-2Rr_1}-\sqrt{R^2-2Rr_2}|=$$
$$\frac{2R|r_1-r_2|}{\sqrt{R^2-2Rr_1}+\sqrt{R^2-2Rr_2}}>$$
$$\frac{2R|r_1-r_2|}{R+R}=|r_1-r_2|$$

矛盾. 所以 C_2 不能严格包含于 C_1.

75 设与 $\triangle ABC$ 的外接圆内切并与边 AB, AC 相切的圆为 C_a，记 r_a 为圆 C_a 的半径，类似地定义 r_b, r_c；r 是 $\triangle ABC$ 的内切圆的半径. 证明：$r_a+r_b+r_c\geqslant 4r$.

（2004 年中国国家队培训题）

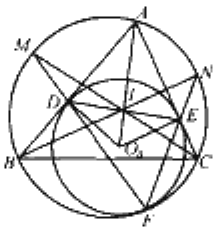


图 96

证明 如图 96，设 C_a 与 AB, AC，$\triangle ABC$ 外接圆分别切于 D、E、F. M、N 分别为 $\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{AC}$ 中点，I 为 $\triangle ABC$ 内心.

这时，F 是 C_a 与 $\triangle ABC$ 外接圆的位似中心，且过 M 的切线平行 AB(由 $\overset{\frown}{AM}=\overset{\frown}{BM}$，根据对称性可得)．因此，$M$，$D$ 为一组对应点，于是 F，D，M 共线．同理，F，E，N 共线．而 BN，CM 为角平分线可得 BN 交 CM 于点 I，从而在六边形 $ABNFMC$ 中应用帕斯卡定理有 D，I，E 共线．由图形的对称性可知 $DE\perp AI$，因此，记 C_a 圆心为 O_a，有

$$\frac{r_a}{r}=\frac{AO_a}{AI}=\frac{AO_a}{AD}\cdot\frac{AD}{AI}=\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}$$

同理
$$\frac{r_b}{r}=\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}},\frac{r_c}{r}=\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}$$

而
$$\tan\frac{A}{2}=\frac{1}{\tan\frac{B+C}{2}}=\frac{1-\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}}{\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}}\Rightarrow$$

$$\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{A}{2}=1$$

因此
$$\frac{r_a}{r}+\frac{r_b}{r}+\frac{r_c}{r}=\frac{1}{\cos^2\frac{A}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{B}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}=$$
$$3+\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}=$$
$$3+\tan\frac{A}{2}\cdot\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{B}{2}\cdot\tan\frac{C}{2}+$$
$$\tan\frac{C}{2}\cdot\tan\frac{A}{2}+\frac{1}{2}\left[\left(\tan\frac{A}{2}-\tan\frac{B}{2}\right)^2+\right.$$
$$\left.\left(\tan\frac{B}{2}-\tan\frac{C}{2}\right)^2+\left(\tan\frac{C}{2}-\tan\frac{A}{2}\right)^2\right]\geqslant 4$$

故有
$$r_a+r_b+r_c\geqslant 4r$$

76 设 $ABCD$ 是一个有内切圆的凸四边形，它的每个内角和外角都不小于 $60°$．证明：

$$\frac{1}{3}|AB^3-AD^3|\leqslant|BC^3-CD^3|\leqslant 3|AB^3-AD^3|$$

等号何时成立？

(2004 年美国数学奥林匹克)

证明 如图 97，利用余弦定理，知

$$BD^2=AD^2+AB^2-2AD\cdot AB\cdot\cos A=$$
$$CD^2+BC^2-2CD\cdot BC\cdot\cos C$$

由条件知 $A\geqslant 60°$，$C\leqslant 120°$，故

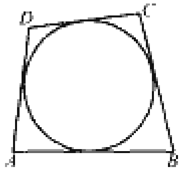


图 97

$$-\frac{1}{2}\leqslant \cos A\leqslant \frac{1}{2},-\frac{1}{2}\leqslant \cos C\leqslant \frac{1}{2}$$

于是
$$\begin{aligned}&3BD^2-(AB^2+AD^2+AB\cdot AD)=\\&2(AB^2+AD^2)-AB\cdot AD(1+6\cos A)\geqslant\\&2(AB^2+AD^2)-4AB\cdot AD=\\&2(AB-AD)^2\geqslant 0\end{aligned}$$

即
$$\frac{1}{3}(AB^2+AD^2+AB\cdot AD)\leqslant BD^2=CD^2+BC^2-2CD\cdot BC\cdot\cos C\leqslant CD^2+BC^2+CD\cdot BC$$

再由 $ABCD$ 为圆外切四边形,可知 $AD+BC=AB+CD$,所以

$$|AB-AD|=|CD-BC|$$

结合上式,就有

$$\frac{1}{3}|AB^3-AD^3|\leqslant|BC^3-CD^3|$$

等号成立的条件为 $\cos A=\frac{1}{2},AB=AD,\cos C=-\frac{1}{2}$ 或者 $|AB-AD|=|CD-BC|=0$. 所以,等号成立的条件是 $AB=AD$ 且 $CD=BC$.

同理可证另一个不等式成立,等号成立的条件同上.

77 凸四边形 $ABCD$ 有内切圆 ω,设 I 为 ω 的圆心,且

$$(AI+DI)^2+(BI+CI)^2=(AB+CD)^2$$

证明:$ABCD$ 是一个等腰梯形.

(2004 年美国数学奥林匹克)

证明 如图 98,设 ω 分别切四边形 $ABCD$ 的边 AB,BC,CD,DA 于点 E,F,G,H. 记 $\angle AIE=\alpha,\angle BIF=\beta,\angle CIG=\gamma,\angle DIH=\delta$,圆 ω 半径为 R,则 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 都是锐角,且 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=\pi$. 进一步可知

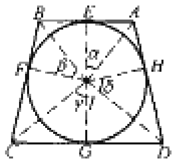


图 98

$$AI=\frac{R}{\cos\alpha},BI=\frac{R}{\cos\beta},CI=\frac{R}{\cos\gamma},DI=\frac{R}{\cos\delta}$$

而
$$AB+CD=AE+EB+CG+GD=R(\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma+\tan\delta)$$

所以,由条件可知

$$\left(\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\delta}\right)^2+\left(\frac{1}{\cos\beta}+\frac{1}{\cos\gamma}\right)^2=(\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma+\tan\delta)^2$$

上式展开后,整理得

$2\tan\alpha\cdot\tan\delta+2\tan\beta\cdot\tan\gamma+2(\tan\alpha+\tan\delta)(\tan\beta+\tan\gamma)-$

$$\frac{2}{\cos\alpha\cdot\cos\delta}-\frac{2}{\cos\beta\cdot\cos\gamma}=4$$

记 $\alpha+\delta=\theta$,则 $\beta+\gamma=\pi-\theta$,上式变形为

$$\frac{\sin\alpha\cdot\sin\delta-1}{\cos\alpha\cdot\cos\delta}+\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma-1}{\cos\beta\cdot\cos\gamma}+\frac{\sin^2\theta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\cdot\cos\delta}=2\Leftrightarrow$$

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\cdot\cos\delta}=\frac{\cos\theta+1}{\cos\alpha\cdot\cos\delta}+\frac{1-\cos\theta}{\cos\beta\cdot\cos\gamma}\Leftrightarrow$$

$$\sin^2\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\cos\alpha\cdot\cos\delta+2\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma\Leftrightarrow$$

$$\sin^2\theta=\sin^2\frac{\theta}{2}[\cos(\alpha-\delta)+\cos(\alpha+\delta)]+$$
$$\cos^2\frac{\theta}{2}[\cos(\beta-\gamma)+\cos(\beta+\gamma)]\Leftrightarrow$$

$$\sin^2\theta=\cos\theta\left(\sin^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}\right)+\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\cos(\alpha-\delta)+$$
$$\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\cos(\beta-\gamma)\Leftrightarrow$$

$$\sin^2\frac{\theta}{2}\cdot\cos(\alpha-\delta)+\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot\cos(\beta-\gamma)=1\Leftrightarrow$$

$$\sin^2\frac{\theta}{2}[1-\cos(\alpha-\delta)]+\cos^2\frac{\theta}{2}[1-\cos(\beta-\gamma)]=0$$

注意到,$\sin^2\frac{\theta}{2}>0,\cos^2\frac{\theta}{2}>0$,所以,$\cos(\alpha-\delta)=1,\cos(\beta-\gamma)=1$,于是 $\alpha=\delta,\beta=\gamma$.进而

$$AB=R(\tan\alpha+\tan\beta)=R(\tan\gamma+\tan\delta)=CD$$

并且 $$\angle BAD=\pi-2\alpha=\pi-2\delta=\angle CDA$$

同理 $\angle ABC=\angle BCD$,故有 $\angle BAD+\angle ABC=\pi$,即 $BC\ /\!/\ AD$.

所以,$ABCD$ 是以 BC,AD 为上,下底的等腰梯形.

78 四边形 $ABCD$ 外切于圆,$\angle A$ 和 $\angle B$ 的外角平分线相交于点 K,$\angle B$ 和 $\angle C$ 的外角平分线相交于点 L,$\angle C$ 和 $\angle D$ 的外角平分线相交于点 M,$\angle D$ 和 $\angle A$ 的外角平分线相交于点 N.现设 $\triangle ABK$,$\triangle BCL$,$\triangle CDM$,$\triangle DAN$ 的垂心分别是 K_1,L_1,M_1,N_1.证明:四边形 $K_1L_1M_1N_1$ 是平行四边形.

(2004 年俄罗斯数学奥林匹克)

证明 如图 99,将 $ABCD$ 的内切圆圆心记作 O.由于内角平分线与外角平分线相互垂直,所以 $OA\perp NK$,$OB\perp KL$.由于 $\triangle ABK$ 的高 AK_1 垂直于 KB,所以 $AK_1\ /\!/\ OB$.同理 $BK_1\ /\!/\ OA$,从而 $AOBK_1$ 是平行四边形.于是点 K_1 可以由点 A 平移 $\overrightarrow{AK_1}=\overrightarrow{OB}$ 得到.因而,点 L_1 也可以由点 C 平移一个向量 $\overrightarrow{OB}$ 得到.所以 $\overrightarrow{K_1L_1}=\overrightarrow{AC}$.

同样又得到$\overrightarrow{N_1M_1}=\overrightarrow{AC}$，所以 $K_1L_1M_1N_1$ 是平行四边形.

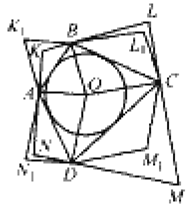


图 99

79 四边形 $ABCD$ 既可外切于圆，又可内接于圆，并且 $ABCD$ 的内切圆分别与它的边 AB，BC，CD，AD 相切于点 K，L，M，N. 四边形的 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的外角的平分线相交于点 K'，$\angle B$ 和 $\angle C$ 的外角平分线相交于点 L'，$\angle C$ 和 $\angle D$ 的外角平分线相交于点 M'，$\angle D$ 和 $\angle A$ 的外角平分线相交于点 N'. 证明：直线 KK'，LL'，MM'，NN' 经过同一个点.

(2004 年俄罗斯数学奥林匹克)

证明 如果 $ABCD$ 是梯形，并且 $AB\ /\!/\ CD$. 此时直线 LL' 和 NN' 与 AB 的中垂线有公共的交点，并且点 K，K'，M 和 M' 都在该中垂线上. 所以此时题中结论成立.

如果直线 AB 与 CD 相交于点 E，而直线 BC 和 AD 相交于点 F，如图 100 所示，那么点 K' 和 M' 位于 $\angle CFD$ 的平分线上. 假设该平分线分别与 AB 和 CD 相交于点 P 和 Q.

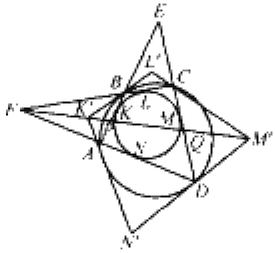


图 100

由于 $ABCD$ 可内接于圆，而 FP 是 $\angle CFD$ 的平分线，所以

$$\angle FAP=\angle FCQ$$

$$\angle PFA=\angle CFQ\Rightarrow\angle FPA=180^{\circ}-\angle CFQ-\angle FCQ=$$

$$\angle FQC\Rightarrow\angle EPQ=\angle EQP$$

即 $\angle AED$ 的平分线是等腰 $\triangle EPQ$ 的高. 由于点 L' 和 N' 都在这条高上，所以 $K'M'\perp L'N'$. 但是 $\angle AED$ 的平分线垂直于 KM，所以 $KM\ /\!/\ K'M'$. 直线 KL 垂直于 $\angle ABC$ 的平分线，也就是平行于 $\angle B$ 的外角平分线，因此 $K'L'\ /\!/\ KL$(同理 $L'M'\ /\!/\ LM$). 于是，$\triangle KLM$ 和 $\triangle K'L'M'$ 的各对应边平行，从而它们同位相似. 在该同位相似之下，点 K 变为 K'，点 M 变为 M'. 又由于平行直线变为平行直线，故 KN 和 MN 分别变为 $K'N'$ 和 $M'N'$. 这就表明点 N 变为 N'. 从而四边形 $KLMN$ 与 $K'L'M'N'$ 同位相似. 因此，直线 KK'，LL'，MM'，NN' 都经过位似中心，即经过同一个点.

80 将 $\triangle ABC$ 的外接圆记作 Ω. 点 P 在圆周 Ω 上. 将 $\triangle ABC$ 中分别与边 BC 和 CA 相切的旁切圆的圆心记作 I_A 和 I_B. 证明：$\triangle I_ACP$ 和 $\triangle I_BCP$ 的外心连线的中点就是 Ω 的圆心.

(2004 年俄罗斯数学奥林匹克)

证明 设线段 I_AI_B 的中点为 M. 由于内外角的平分线相互垂直，所以 $AI_A\perp AI_B$. 在直角 $\triangle AI_AI_B$ 中，斜边 I_AI_B 的中点 M 到各顶点的距离相等，所以 $MA=\frac{1}{2}I_AI_B$. 同理 $MB=\frac{1}{2}I_AI_B$. 从而 M 是四

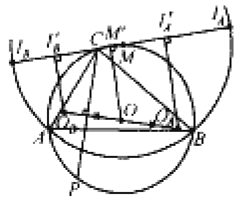


图 101

边形 AI_BI_AB 的外接圆的圆心. 因此 $\angle AI_AB=\frac{1}{2}\angle AMB$. 我们注意到

$$\angle AI_AB=\frac{1}{2}(180°-\angle ABC)-\frac{1}{2}\angle BAC=\frac{1}{2}\angle ACB$$

所以 $\angle AMB=\angle ACB$, 于是点 A,B,C 和 M 都在圆周 Ω 上. 由于 $AM=MB$, 所以点 M 是该圆周上弧 $\overset{\frown}{ACB}$ 的中点.

设 I_A',I_B',M' 分别是线段 CI,CI_B,CM 的中点, 如图 101 所示, 则点 I_A',I_B',M' 分别是点 O_A,O_B,O 在直线 I_AI_B 上的投影(其中, O_A,O_B,O 分别是 $\triangle I_ACP,\triangle I_BCP,\triangle ABC$ 的外心). 点 O_A,O_B, O 都在线段 CP 的中垂线上, 所以为证题中结论, 只须证明 M' 是线段 $I_A'I_B'$ 的中点. 而这是正确的, 因为点 M 是线段 I_AI_B 的中点, 而点 I_A',I_B',M' 可以由点 I_A,I_B,M 通过以点 C 为中心作同位相似得到, 位似系数为 $\frac{1}{2}$.

81 设与 $\triangle ABC$ 的外接圆内切并与边 AB,AC 相切的圆为 C_a, 记 r_a 为圆 C_a 的半径, r 是 $\triangle ABC$ 的内切圆半径. 类似地定义 r_b,r_c. 证明: $r_a+r_b+r_c\geqslant 4r$.

(2002 ~ 2003 年伊朗数学奥林匹克)

证明　设 O_a,O_b,O_c 为圆 C_a, 圆 C_b, 圆 C_c 的圆心. 记 M,N 为点 O_a 在 AB,AC 上的投影, 则 $\triangle ABC$ 的内心 I 为 MN 的中点.

设 X,Y 为 I 在 AB,AC 上的投影, 有

$$\frac{r_a}{r}=\frac{O_aM}{IX}=\frac{AM}{AX}=\frac{\dfrac{AI}{\cos\dfrac{A}{2}}}{AI\cdot\cos\dfrac{A}{2}}=\frac{1}{\cos^2\dfrac{A}{2}}$$

同理
$$\frac{r_b}{r}=\frac{1}{\cos^2\dfrac{B}{2}},\frac{r_c}{r}=\frac{1}{\cos^2\dfrac{C}{2}}$$

令 $\alpha=\frac{A}{2},\beta=\frac{B}{2},\gamma=\frac{C}{2}$. 只须证当 $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$ 时, 有

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\gamma}\geqslant 4$$

即
$$\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma\geqslant 1$$

由柯西 - 许瓦尔兹(Cauchy - Schwartz) 不等式, 有

$$3(\tan^2\alpha+\tan^2\beta+\tan^2\gamma)\geqslant(\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma)^2$$

故只须证
$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma\geqslant\sqrt{3}$$

因为 $\tan x$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上是凸函数, 故由琴生不等式得

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma\geqslant 3\tan\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$$

因此
$$r_a+r_b+r_c\geqslant 4r$$

82 给定 Rt△ABC，$\angle C$ 是直角，点 D 是边 AC 上的任一点．两个圆与直线 AB 分别相切于点 A，B，这两个圆相交于 D，E 两点．证明：$\angle BAC=\angle DEC$．

（2003 年国际数学奥林匹克斯洛文尼亚国家队选拔赛试题）

证明　如图 102，用 G 表示直线 AB，ED 的交点．由圆幂定理有

$$GA\cdot GA=GD\cdot GE$$
$$GB\cdot GB=GD\cdot GE$$

故
$$GA\cdot GA=GB\cdot GB$$

即 $GA=GB$，于是，G 是 △ABC 的外接圆的圆心，且 $\angle GAC=\angle ACG$．由弦切角定理，有

$$\angle AEG=\angle GAC=\angle ACG$$

因此，四边形 $AGCE$ 是圆内接四边形．故

$$\angle DEC=\angle GEC=\angle GAC=\angle BAC$$

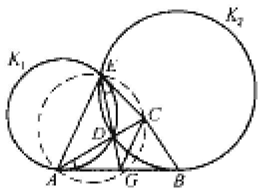


图 102

83 两个圆圆 O_1，圆 O_2 相交于 P，Q 两点，且这两个圆离点 P 较近的公切线分别与圆 O_1 相切于点 A，与圆 O_2 相切于点 B．一条与圆 O_1 相切于点 P 的直线与圆 O_2 再次相交于点 C，同时，直线 AP，BC 相交于点 R．证明：△PQR 的外接圆与直线 BP，BR 相切．

（2003 年国际数学奥林匹克斯洛文尼亚国家队选拔赛试题）

证明　如图 103，因为

$$\angle BRP=\angle BCP+\angle CPR=\angle ABP+\angle APX=$$
$$\angle ABP+\angle XAP=\angle BPR$$

所以，$BP=BR$．

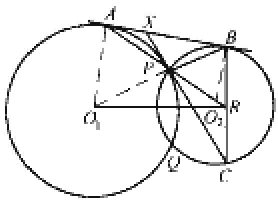


图 103

如图 104，作 $AD\perp O_1O_2$，$BE\perp O_1O_2$，垂足分别为 D，E，作 $BO\perp AP$ 交 O_1O_2 于 O，易知 O 为 △PQR 的外心．

设 $\angle PAB=\alpha$，$\angle ABP=\beta$，$\angle AO_1D=\angle BO_2E=\gamma$，圆 O_1，圆 O_2 半径分别为 r_1，$r_2(r_1\geqslant r_2)$．易知

$$\angle PBO=90^\circ-\alpha-\beta,\angle OBO_2=\alpha$$

$$BP=2r_2\cdot\sin\beta,BO=\frac{r_2\cdot\sin\gamma}{\sin(r-\alpha)}$$

所以，命题 $\Leftrightarrow OP \perp PB \Leftrightarrow \dfrac{BP}{BO} = \cos\angle PBO \Leftrightarrow$

$$\frac{2\sin\beta\cdot\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\gamma} = \sin(\alpha+\beta) \Leftrightarrow$$

$$2\sin\beta(\sin\gamma\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\gamma) =$$

$$\sin\gamma(\sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha) \Leftrightarrow$$

$$\sin\gamma\cdot\sin(\beta-\alpha) = 2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma$$

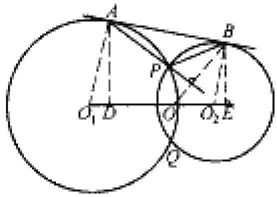


图 104

由 $AP = 2r_1\cdot\sin\alpha, BP = 2r_2\cdot\sin\beta, AP : BP = \sin\beta : \sin\alpha$ 有

$$r_1 : r_2 = \sin^2\beta : \sin^2\alpha$$

由
$$r_1\cdot\sin\angle PO_1O_2 = r_2\cdot\sin\angle PO_2O_1$$

有 $r_1\cdot\sin(\gamma-2\alpha) = r_2\cdot\sin(\gamma+2\beta) \Leftrightarrow$

$\sin^2\beta\cdot\sin(\gamma-2\alpha) = \sin^2\alpha\cdot\sin(\gamma+2\beta) \Leftrightarrow$

$(1-\cos 2\beta)(\sin\gamma\cdot\cos 2\alpha - \cos\gamma\cdot\sin 2\alpha) =$

$(1-\cos 2\alpha)(\sin\gamma\cdot\cos 2\beta + \cos\gamma\cdot\sin 2\beta) \Leftrightarrow$

$\sin\gamma(\cos 2\alpha - \cos 2\beta) = \cos\gamma[\sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2(\alpha+\beta)] \Leftrightarrow$

$\sin\gamma\cdot 2\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta-\alpha) = \cos\gamma\cdot 4\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta \Leftrightarrow \sin\gamma\cdot\sin(\beta-\alpha) = 2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\gamma$

(84) 设 A_0 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点，A' 是 $\triangle ABC$ 的内切圆与边 BC 的切点. 以 A_0 为圆心，A_0A' 为半径作圆 ω_1，同理定义 B_0，B' 及圆 ω_2 和 C_0，C' 及圆 ω_3. 证明：若圆 ω_1 与 $\triangle ABC$ 的外接圆在不包含 A 的弧 BC 处相内切，则另外两个圆中的一个也与 $\triangle ABC$ 的外接圆在相应的弧段处相内切.

(2003 年俄罗斯数学奥林匹克)

证明 如图 105，不妨设 $AB > AC$.

因为圆 ω_1 与圆 O 相切，所以

$$R - r_{\omega_1} = d \text{（}d\text{ 为圆心距）} \quad ①$$

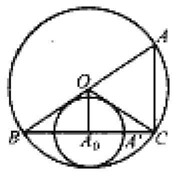


图 105

即
$$R - A_0A' = OA_0$$

又
$$\angle A_0OC = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle A$$

因此
$$① \Leftrightarrow R - \left(\frac{a+c-b}{2} - \frac{a}{2}\right) = R\cdot\cos A \Leftrightarrow$$

$$\frac{c-b}{2} = R(1-\cos A) \Leftrightarrow$$

$$\sin C - \sin B = 1 - \cos A$$

于是
$$2\cos\frac{C+B}{2}\cdot\sin\frac{C-B}{2} = 2\sin^2\frac{A}{2}$$

从而
$$\sin\frac{C-B}{2}=\sin\frac{A}{2}$$

由于 $0<\frac{\angle C-\angle B}{2}<\frac{\pi}{2}, 0<\frac{\angle A}{2}<\frac{\pi}{2}$，可得
$$\frac{\angle C-\angle B}{2}=\frac{\angle A}{2}$$

即
$$\angle A+\angle B=\angle C$$

故 $\angle C=90^\circ$.

因此，在另一条直角边 AC 上，只须证
$$\sin C-\sin A=1-\cos B$$
这显然成立.

85 $\triangle ABC$ 是一个三角形. 一个过 A, B 的圆交边 AC, BC 于点 D, E. AB, DE 交于点 F, BD, CF 交于点 M. 求证：$MF=MC$ 的充要条件是 $MB\cdot MD=MC^2$.

（2003 年美国数学奥林匹克）

证明 如图 106，因为 A, B, E, D 四点共圆，所以，$\angle CBD=\angle EAD$.

又 AC, BM, FE 交于点 D，由塞瓦定理有
$$\frac{FA}{AB}\cdot\frac{BE}{EC}\cdot\frac{CM}{MF}=1$$

因此 $MF=MC\Leftrightarrow\frac{FA}{AB}\cdot\frac{BE}{EC}=1\Leftrightarrow$
$AE\parallel CF\Leftrightarrow\angle FCA=\angle EAC=\angle MBC\Leftrightarrow$
$\triangle MCD\backsim\triangle MBC\Leftrightarrow MB\cdot MD=MC^2$

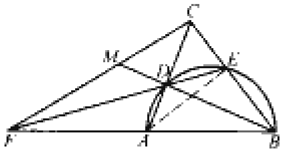


图 106

86 两圆外切于点 A，且内切于另一圆 Γ 于点 B, C. 令 D 是小圆内公切线割 Γ 的弦的中点. 证明：当 B, C, D 不共线时，A 是 $\triangle BCD$ 的内切圆圆心.

（2002 年土耳其数学奥林匹克）

证明 以 A 为反演中心，r（r 为任意正实数）为反演半径作图 107 的反演得到图 108. 其中圆 Γ_1，圆 Γ_2 成为两条平行的（圆 Γ^* 的）切线 Γ_1^*, Γ_2^*，直线 $MADN$ 反演后成为一条平行于 Γ_1^* 的直线，D^* 在圆 Γ^* 外.

欲证 A 为 $\triangle BCD$ 的内切圆圆心，只须证 A 到 BC, CD, BD 的距离相等，且 A 在 $\triangle BCD$ 的内部，即证 $\triangle AB^*C^*$，$\triangle AB^*D^*$，$\triangle AC^*D^*$ 的外接圆半径相等. 由正弦定理可知，只须证明
$$\angle AB^*C^*=\angle AD^*C^*, \angle AC^*B^*=\angle AD^*B^*$$

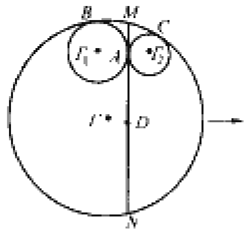


图 107

由圆幂定理,有

$$\left(\frac{AM+AN}{2}\right)^2-AD^2=AM\cdot AN$$

则 $$\frac{1}{4}\left(\frac{AM^*+AN^*}{AM^*\cdot AN^*}\right)^2-\left(\frac{1}{AD^*}\right)^2=\frac{1}{AM^*\cdot AN^*}$$

即 $$\left(\frac{AM^*-AN^*}{2AM^*\cdot AN^*}\right)^2=\frac{1}{AD^{*2}}$$

故 $$AD^*=\frac{2AM^*\cdot AN^*}{AM^*-AN^*}=\frac{AM^*\cdot AN^*}{AT^*}$$

所以 $$AD^*\cdot AT^*=AM^*\cdot AN^*$$

则 $AT^*\cdot D^*T^*=AM^*\cdot AN^*+AT^{*2}=M^*T^*\cdot N^*T^*=$

$$B^*T^*\cdot C^*T^*$$

故 $$\frac{AT^*}{T^*C^*}=\frac{T^*B^*}{T^*D^*}$$

即 $$\tan\angle AB^*C^*=\tan\angle AD^*C^*$$

因为 $\angle AB^*C^*<90^\circ$,$\angle AD^*C^*<90^\circ$,所以

$$\angle AB^*C^*=\angle AD^*C^*$$

同理 $$\angle AC^*B^*=\angle AD^*B^*$$

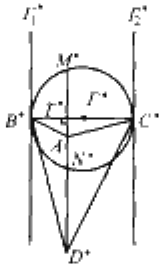


图 108

87 已知 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,以 AB 为直径的圆 K 分别交 AC、BC 于点 P,Q. 分别过 A 和 Q 作圆 K 的两条切线交于点 R,分别过 B 和 P 作圆 K 的两条切线交于点 S. 证明:点 C 在线段 RS 上.

(2002 年澳大利亚国家数学竞赛)

证明 如图 109,设 M 是 AB 的中点,C 在边 AB 上的投影为 E,RS 与 AB 交于点 T.

因为 $RM\perp AQ$,$BC\perp AQ$,所以,$RM/\!/BC$.

同理,$MS/\!/AC$.

又因为 RA,SB 及 CE 均垂直于 AB,所以,$RA/\!/SB/\!/CE$. 于是有

$$\triangle RAM\backsim\triangle CEB,\triangle SBM\backsim\triangle CEA$$

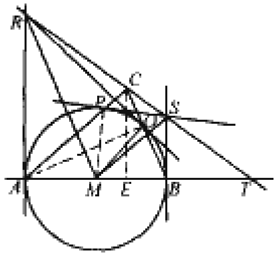


图 109

则 $$\frac{RA}{AM}=\frac{CE}{EB},\frac{SB}{BM}=\frac{CE}{EA}$$

故 $$RA\cdot EB=AM\cdot CE,SB\cdot EA=BM\cdot CE$$

又因为 $AM=BM$,所以

$$RA\cdot EB=SB\cdot EA$$

即 $$\frac{RA}{SB}=\frac{EA}{EB}$$

所以 $$\frac{AT}{BT}=\frac{RA}{SB}=\frac{EA}{EB}$$

$$EB \cdot AT = BT \cdot EA$$

$$EB(AT + BT) = BT(EA + EB)$$

故
$$EB = \frac{BT(EA + EB)}{AT + BT} = \frac{BT(AT - BT)}{AT + BT}$$

$$EB + BT = \frac{BT(AT - BT)}{AT + BT} + \frac{BT(AT + BT)}{AT + BT} = \frac{2AT \cdot BT}{AT + BT}$$

$$\frac{RA}{CE} = \frac{AM}{EB} = \frac{\frac{AT - BT}{2}}{EB} = \frac{AT + BT}{2BT} = \frac{AT}{EB + BT} = \frac{AT}{ET}$$

因此,点 E 在直线 RT 上.

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,点 E 在 A,B 之间,所以,点 C 在 R,S 之间,即点 C 在线段 RS 上.

88 已知圆 O_1 与圆 O_2 交于 A,B 两点,过点 B 作直线交圆 O_1 于 K,交圆 O_2 于 M,作平行于 AM 的直线,且与圆 O_1 切于点 Q,联结 AQ,交圆 O_2 于 R. 证明:

(1) 过 R 且与圆 O_2 相切的直线平行于 AK;

(2) 分别过 Q,R 的这两条切线与 KM 交于一点.

(2002 年香港数学奥林匹克)

证明 (1) 如图 110,设 PR 为过 R 且与圆 O_2 相切的切线,联结 AB、MR,则

$$\angle ARP = \angle MRP + \angle ARM = \angle MAR + \angle ABK = \angle LQA + \angle ABK = \angle QBA + \angle ABK = 180^\circ - \angle KAQ$$

于是,$AK \parallel PR$.

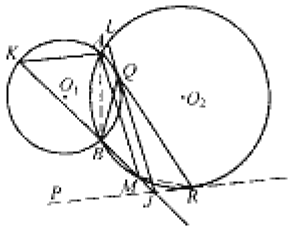


图 110

(2) 设分别过 Q,R 的两条切线交于点 J. 因为

$$\angle BRP = \angle BAR = \angle BQR - \angle ABQ = \angle BQR - \angle AQL = \angle BQR - \angle JQR = \angle BQJ$$

所以,B,J,R,Q 四点共圆. 从而

$$\angle KBQ + \angle QBJ = 180^\circ - \angle KAQ + 180^\circ - \angle JRA = 360^\circ - 180^\circ = 180^\circ$$

故 K,B,J 三点共线.

89 如图111,设圆 S_1 和圆 S_2 相交于 A,B 两点,经过 A 的直线交圆 S_1 于 C,交圆 S_2 于 D,点 M,N,K 分别在线段 CD,BC,BD 上,且 MN // BD,MK // BC. 分别过 N,K 作 BC,BD 的垂线,分别交圆 S_1,圆 S_2 于 E,F,且 E,A 在直线 BC 的异侧,F,A 在直线 BD 的异侧. 证明:$\angle EMF = 90°$.

(第 43 届国际数学奥林匹克预选题)

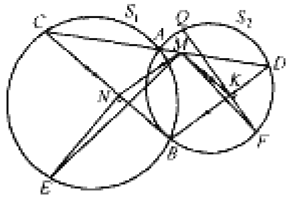


图 111

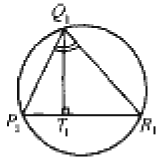


图 112

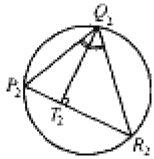


图 113

证明 先证明一个引理:已知 $\angle P_1Q_1R_1 = \angle P_2Q_2R_2$,$T_1$,$T_2$ 是 Q_1,Q_2 分别在 P_1R_1,P_2R_2 上的投影. 如图 112,113. 若 $\frac{P_1T_1}{T_1R_1} = \frac{P_2T_2}{T_2R_2}$,则 $\triangle P_1Q_1R_1 \backsim \triangle P_2Q_2R_2$.

引理的证明:事实上,设 Q_2' 是 $\triangle P_2Q_2R_2$ 的外接圆上一点,且与 Q_2 均在 P_2R_2 同侧,满足 $\triangle P_2Q'_2R_2 \backsim \triangle P_1Q_1R_1$,$T'_2$ 是 Q'_2 在 P_2R_2 上的投影,则

$$\frac{P_2T'_2}{T'_2R_2} = \frac{P_1T_1}{T_1R_1} = \frac{P_2T_2}{T_2R_2}$$

故 $T'_2 = T_2$,$Q'_2 = Q_2$.

下面回到原题.

由于 MN // DB,MK // BC,所以

$$\frac{BN}{NC} = \frac{DM}{MC} = \frac{DK}{KB}$$

设 FK 交圆 S_2 于 Q,则

$$\angle BQD = \angle BAD = \angle BEC$$

由引理知 $\triangle BEC \backsim \triangle DQB$. 于是,$\angle EBC = \angle QDB = \angle QFB$,故 $\text{Rt}\triangle BNE \backsim \text{Rt}\triangle FKB$.

由于 $\angle MNB = \angle MKB$,所以

$$\angle ENM = \angle MKF$$

$$\frac{MN}{KF} = \frac{BK}{KF} = \frac{EN}{NB} = \frac{EN}{MK}$$

故 $\triangle ENM \backsim \triangle MKF$,且有 $\angle NME = \angle KFM$.

因为对应边 $MN \perp KF$,所以,$EM \perp FM$.

90 已知锐角 $\triangle ABC$ 的内切圆圆 I 与边 BC 切于点 K,AD 是 $\triangle ABC$ 的高,M 是 AD 的中点. 如果 N 是圆 I 与 KM 的交点,证明:圆 I 与 $\triangle BCN$ 的外接圆相切于点 N.

(第 43 届国际数学奥林匹克预选题)

证明 当 $AB = AC$ 时,显然,这两个圆的圆心距等于这两个

圆的半径之差.

不妨假设 $AB < AC$. 如图 114 所示,设 BC 的中垂线交 NK 于点 P,交 BC 于点 A'. 设 $\triangle BCN$ 的外心为 S,设 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 $a,b,c,p=\frac{1}{2}(a+b+c)$,则

$$BK=p-b, KC=p-c$$

于是
$$BK\cdot KC=(p-b)(p-c)$$

又因为
$$BD=c\cdot\cos B=\frac{1}{2a}(c^2+a^2-b^2)$$

$$KA'=BA'-BK=\frac{1}{2}(b-c)$$

$$DK=BK-BD=\frac{1}{a}(b-c)(p-a)$$

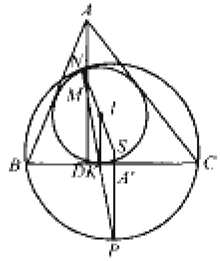


图 114

设 $\angle MKD=\varphi$,则

$$\tan\varphi=\frac{MD}{DK}=\frac{\frac{1}{2}aAD}{(b-c)(p-a)}=\frac{S_{\triangle ABC}}{(b-c)(p-a)}$$

设 r 为 $\triangle ABC$ 的内切圆半径,则

$$NK=2r\cdot\sin\varphi, KP=KA'\cdot\sec\varphi$$

于是 $NK\cdot KP=2r\cdot\tan\varphi\cdot KA'=\frac{rS_{\triangle ABC}}{p-a}=\frac{S^2_{\triangle ABC}}{p(p-a)}=$

$$(p-b)(p-c)=BK\cdot KC$$

因此,P 在 $\triangle BCN$ 的外接圆上.

因为 $IK /\!/ SP$,则 $\angle PNS=\angle NPS=\angle NKI=\angle PNI$. 所以,$N,I,S$ 三点共线.

因此,圆 I 与 $\triangle BCN$ 的外接圆相切于点 N.

91 如图 115,已知圆 S_1 与圆 S_2 交于 P,Q 两点,A_1,B_1 为圆 S_1 上不同于 P,Q 的两个点,直线 A_1P,B_1P 分别交圆 S_2 于 A_2,B_2,直线 A_1B_1 和 A_2B_2 交于点 C. 证明:当点 A_1 和点 B_1 变化时,$\triangle A_1A_2C$ 的外心总在一个定圆周上.

(第 43 届国际数学奥林匹克预选题)

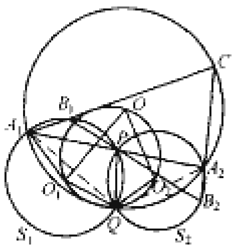


图 115

证明 因为

$$\angle A_1CA_2+\angle A_1QA_2=\angle A_1CA_2+\angle A_1QP+\angle PQA_2=\angle B_1CB_2+\angle CB_1B_2+\angle CB_2B_1=180^\circ$$

则 A_1,C,A_2,Q 四点共圆. 设 O 是 $\triangle A_1A_2C$ 的外心,O_1,O_2 分别为圆 S_1 和圆 S_2 的圆心,则

$$\angle OO_1Q = \frac{1}{2}\angle A_1O_1Q = 180° - \angle A_1PQ$$

同理 $\angle OO_2Q = 180° - \angle A_2PQ$

所以 $\angle OO_1Q + \angle OO_2Q = 180°$

因此，$\triangle A_1A_2C$ 的外心总在一个过 O_1，O_2 和 Q 的定圆上.

92 如图116，设 B 是圆 S_1 上的点，过 B 作圆 S_1 的切线，A 为该切线上异于 B 的点，又 C 不是圆 S_1 上的点，且线段 AC 交圆 S_1 于两个不同的点. 圆 S_2 与 AC 相切于点 C，与圆 S_1 相切于点 D，且 D 与 B 在直线 AC 的两侧. 证明：$\triangle BCD$ 的外心在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

（第43届国际数学奥林匹克预选题）

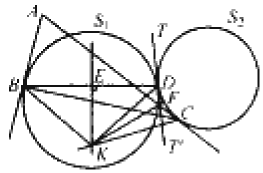


图 116

证法1 设 E，F 分别是 BD，CD 的中点，K 是 $\triangle BCD$ 的外心，TDT' 是圆 S_1 与 S_2 的内公切线，则 EK 是 BD 的中垂线，且平分 BA 与 DT 所构成的角. 于是，点 K 到 BA，DT 的距离相等.

同理，FK 是 CD 的中垂线，且点 K 到 AC，DT 的距离相等. 于是，点 K 是 BA，AC，DT 均相切的圆的圆心. 所以，AK 是 $\angle BAC$ 的角平分线.

又因为 K 也在 BC 的中垂线上，则这条中垂线与 $\angle BAC$ 的角平分线的交点在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

证法2 因 $\angle TDB = \angle ABD$，$\angle T'DC = \angle DCA$，则

$$\begin{aligned}\angle BDC &= 180° - \angle TDB + \angle T'DC = 180° - \angle ABD + \angle DCA = \\ &180° - (\angle ABC - \angle DBC) + (\angle DCB - \angle ACB) = \\ &180° - \angle ABC - \angle ACB + \angle DBC + \angle DCB = \\ &\angle BAC + 180° - \angle BDC\end{aligned}$$

于是 $2\angle BDC = 180° + \angle BAC$

故 $\angle BKC = \angle BKD + \angle DKC = 2(\angle EKD + \angle DKF) = 2\angle EKF$

$$2(180° - \angle BDC) = 180° - \angle BAC$$

因此，K 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

93 如图117，设 $\triangle ABC$ 内存在一点 F，使得 $\angle AFB = \angle BFC = \angle CFA$，直线 BF，CF 分别交 AC，AB 于 D，E. 证明：$AB + AC \geqslant 4DE$.

（第43届国际数学奥林匹克预选题）

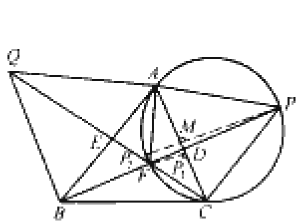


图 117

证法1 先证明一个引理：已知 $\triangle DEF$，点 P，Q 分别在直线

FD,FE 上,使得 $PF \geqslant \lambda DF$,$QF \geqslant \lambda EF$,$\lambda > 0$.若 $\angle PFQ \geqslant 90^\circ$,则 $PQ \geqslant \lambda DE$.

引理的证明:设 $\angle PFQ = \theta$.因 $\theta \geqslant 90^\circ$,则 $\cos\theta \leqslant 0$.所以

$$PQ^2 = PF^2 + QF^2 - 2PF \cdot QF \cdot \cos\theta \geqslant (\lambda DF)^2 + (\lambda EF)^2 - 2\lambda DF \cdot \lambda EF \cdot \cos\theta = (\lambda DE)^2$$

从而,$PQ \geqslant \lambda DE$.

下面回到原题.

因为 $\angle AFE = \angle BFE = \angle CFD = \angle AFD = 60^\circ$,设 BF,CF 分别交 $\triangle CFA$,$\triangle AFB$ 的外接圆于 P,Q,则 $\triangle CPA$ 和 $\triangle ABQ$ 均为正三角形.由引理,令 $\lambda = 4$,$\theta = 120^\circ$,设 P_1 为 F 在直线 AC 上的投影,AC 的中垂线交 $\triangle CFA$ 的外接圆于 P 和 P_2,M 为 AC 的中点,则

$$\frac{PD}{DF} = \frac{PM}{FP_1} \geqslant \frac{PM}{MP_2} = 3$$

所以,$PF \geqslant 4DF$.同理,$QF \geqslant 4EF$.

因为 $\angle DFE = 120^\circ$,由引理可得 $PQ \geqslant 4DE$.故

$$AB + AC = AQ + AP \geqslant PQ \geqslant 4DE$$

证法2 设 $AF = x$,$BF = y$,$CF = z$.由 $S_{\triangle ACF} = S_{\triangle ADF} + S_{\triangle CDF}$,得

$$DF = \frac{xz}{x+z}$$

同理
$$EF = \frac{xy}{x+y}$$

于是,只要证明

$$\sqrt{x^2+xy+y^2} + \sqrt{x^2+xz+z^2} \geqslant 4\sqrt{\left(\frac{xy}{x+y}\right)^2 + \left(\frac{xz}{x+z}\right)^2 + \left(\frac{xy}{x+y}\right)\left(\frac{xz}{x+z}\right)}$$

因为

$$x+y \geqslant \frac{4xy}{x+y}, x+z \geqslant \frac{4xz}{x+z}$$

所以,只要证
$$\sqrt{x^2+xy+y^2} + \sqrt{x^2+xz+z^2} \geqslant \sqrt{(x+y)^2+(x+z)^2+(x+y)(x+z)}$$

平方化简后得

$$2\sqrt{(x^2+xy+y^2)(x^2+xz+z^2)} \geqslant x^2 + 2(y+z)x + yz$$

再平方化简后得
$$3(x^2-yz)^2 \geqslant 0$$

即原不等式成立.

94 已知两圆相交于 X,Y. 证明:存在四个点满足:对于每一个与两个给定的圆分别相切于 A,B 的圆交直线 XY 于 C,D,则 AC,AD,BC,BD 经过这四个点之一.

（第 41 届国际数学奥林匹克预选题）

证明　设 Ω 是一个与给定两圆相切于 A,B 的圆,因为与直线 XY 相交,则与两给定的圆要么都外切,要么都内切. 内切时也有两种情况,不妨只对其中的一种情况给予证明.

如图 118,设 CA 交圆 AXY 于 P,CB 交圆 BXY 于 Q,则

$$CA \cdot CP = CX \cdot CY = CB \cdot CQ$$

所以,A,B,P,Q 四点共圆,于是,$\angle CAB = \angle CQP$.

过 C 作圆 Ω 的切线 CR,R 与 B 在直线 XY 的同侧,则 $\angle BCR = \angle CAB = \angle CQP$. 所以,$CR \parallel PQ$.

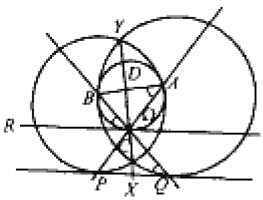


图 118

考虑分别以 A 和 B 为位似中心的两个位似变换,将圆 Ω 变为两个给定的圆. 以 A 为位似中心的位似变换将直线 CR 变为圆 AXY 在点 P 的切线;以 B 为位似中心的位似变换将直线 CR 变为圆 BXY 在点 Q 的切线,且这两条切线均平行于 CR. 因此,这两条切线与直线 PQ 重合,即这两个圆的公切线. 所以,CA,CB 分别过点 P,Q.

综上所述,两个给定圆的两条外公切线与这两个圆的四个切点即为满足条件的四个点.

95 设 O,H 分别为锐角 $\triangle ABC$ 的外心和垂心. 证明:在 BC,CA,AB 上分别存在点 D,E,F,使得 $OD + DH = OE + EH = OF + FH$,且直线 AD,BE,CF 共点.

（第 41 届国际数学奥林匹克预选题）

证明　设 AH 的延长线交 $\triangle ABC$ 的外接圆于 L,交 BC 于 K,连 OL 交 BC 于 D,连 HD. 由于 $HK = KL$,则 $HD = LD$. 如图 119 所示,于是

$$OD + DH = OD + DL = OL = R$$

其中,R 为 $\triangle ABC$ 外接圆半径.

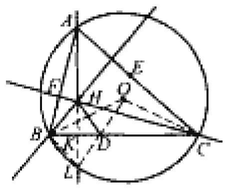


图 119

类似地,可以在 CA 和 AB 上得到点 E 和 F,使得

$$OE + EH = R = OF + FH$$

联结 OB,OC 和 BL,则

$$\angle OBC = 90^\circ - \angle A, \angle CBL = \angle CAL = 90^\circ - \angle C$$

所以　$\angle OBL = 90^\circ - \angle A + 90^\circ - \angle C = \angle B$

由于 $OB=OL$，则 $\angle OLB=\angle B$. 于是

$$\angle BOL=180^\circ-2\angle B$$

$$\angle COD=\angle BOC-\angle BOD=2\angle A-(180^\circ-2\angle B)=180^\circ-2\angle C$$

由正弦定理，有

$$\frac{BD}{\sin\angle BOD}=\frac{OD}{\sin\angle OBD},\frac{CD}{\sin\angle COD}=\frac{OD}{\sin\angle OCD}$$

于是
$$\frac{BD}{CD}=\frac{\sin(180^\circ-2B)}{\sin(180^\circ-2C)}=\frac{\sin 2B}{\sin 2C}$$

同理
$$\frac{CE}{EA}=\frac{\sin 2C}{\sin 2A},\frac{AF}{FB}=\frac{\sin 2A}{\sin 2B}$$

所以
$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1$$

由塞瓦(Ceva)定理的逆定理知 AD,BE,CF 三线交于一点.

96 设 $A_1A_2\cdots A_n$ 是一个凸 n 边形，$n\geqslant 4$. 证明：$A_1A_2\cdots A_n$ 是圆内接 n 边形的充要条件是对于每个顶点 A_j，我们可以构造一个实数对 $(b_j,c_j)(j=1,2,\cdots,n)$，对于所有 $i,j,1\leqslant i<j\leqslant n$，有 $A_iA_j=b_jc_i-b_ic_j$.

（第 41 届国际数学奥林匹克预选题）

证明 若有实数对 (b_j,c_j) 满足待证式，要证明 $A_1A_2\cdots A_n$ 是圆内接 n 边形，只要证明对任意 $j=4,5,\cdots,n$，点 A_1,A_2,A_3,A_j 是圆内接四边形，且设它们是凸四边形 $A_1A_2A_3A_j$ 相邻的顶点. 由托勒密(Ptolemy)定理的逆定理，只须证明

$$A_1A_2\cdot A_3A_j+A_2A_3\cdot A_1A_j=A_1A_3\cdot A_2A_j$$

直接验证，对于 $j=4,5,\cdots,n$，有

$$(b_2c_1-b_1c_2)(b_jc_3-b_3c_j)+(b_3c_2-b_2c_3)(b_jc_1-b_1c_j)=(b_3c_1-b_1c_3)(b_jc_2-b_2c_j)$$

所以，$A_1A_2\cdots A_n$ 是圆内接 n 边形.

反之，设 $A_1A_2\cdots A_n$ 是圆内接 n 边形. 设 $b_1=-A_1A_2$，$b_j=A_2A_j$，$j=2,3,\cdots,n$，$c_j=\dfrac{A_1A_j}{A_1A_2}$，我们验证 b_j,c_j 满足待证式.

如果 $3\leqslant i\leqslant j\leqslant n$，且 A_1,A_2,A_i,A_j 是圆内接四边形相邻的顶点，由托勒密定理，有

$$A_1A_2\cdot A_iA_j=A_1A_i\cdot A_2A_j-A_2A_i\cdot A_1A_j$$

因此
$$A_iA_j=A_2A_j\cdot\frac{A_1A_i}{A_1A_2}-A_2A_i\cdot\frac{A_1A_j}{A_1A_2}=b_jc_i-b_ic_j$$

如果 $i=1,2\leqslant j\leqslant n$，则

$$A_iA_j = A_1A_j = b_j\cdot 0 - (-A_1A_2)\cdot\frac{A_1A_j}{A_1A_2} = b_jc_1 - b_1c_j$$

同理，$i = 2, 3 \leqslant j \leqslant n$，有

$$A_iA_j = A_2A_j = b_j\cdot 1 - 0\cdot c_j = b_jc_2 - b_2c_j$$

综上所述，结论成立.

97 过 B, A 作锐角 $\triangle ABC$ 外接圆的两条切线，且与过点 C 的切线分别交于 T, U，AT 交 BC 于 P，Q 是 AP 的中点，BU 交 AC 于 R，S 是 BR 的中点. 如图 120 所示，证明：$\angle ABQ = \angle BAS$，并求当 $\angle ABQ$ 取最大值时，$\triangle ABC$ 三边边长之比.

（第 41 届国际数学奥林匹克预选题）

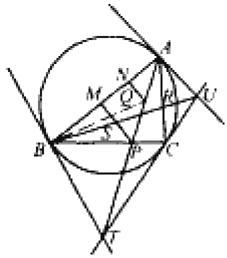


图 120

证明 设 $a = BC, b = CA, c = AB$. 因为 $\angle ABT = 180^\circ - \angle C$，$\angle ACT = 180^\circ - \angle B$，且 $BT = CT$，则

$$\frac{BP}{PC} = \frac{S_{\triangle ABT}}{S_{\triangle ACT}} = \frac{\frac{1}{2}AB\cdot BT\cdot\sin(180^\circ - C)}{\frac{1}{2}AC\cdot CT\cdot\sin(180^\circ - B)} = \frac{c\cdot\sin C}{b\cdot\sin B} = \frac{c^2}{b^2}$$

所以
$$BP = \frac{ac^2}{b^2 + c^2}$$

过 P, Q 分别向 AB 作垂线 PM, QN，垂足分别为 M, N. 则

$$\cot\angle ABQ = \frac{BN}{QN}$$

因为
$$QN = \frac{1}{2}PM = \frac{1}{2}BP\cdot\sin B$$

$$BN = \frac{1}{2}(BA + BM) = \frac{1}{2}(c + BP\cdot\cos B)$$

所以

$$\cot\angle ABQ = \frac{C + BP\cdot\cos B}{BP\cdot\sin B} = \cot B + \frac{c}{BP\cdot\sin B} =$$

$$\cot B + \frac{b^2 + c^2}{ac\cdot\sin B} = \frac{\frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2) + b^2 + c^2}{ab\cdot\sin C} =$$

$$\frac{a^2 + b^2 + 3c^2}{2ab\cdot\sin C}$$

同理可得
$$\cot\angle BAS = \frac{b^2 + a^2 + 3c^2}{2ab\cdot\sin C}$$

故 $\angle ABQ = \angle BAS$.

由余弦定理及 $\sin C > 0$，有

$$\cot\angle ABQ = \frac{a^2 + b^2 + 3c^2}{2ab\cdot\sin C} = \frac{a^2 + b^2 + 3(a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos C)}{2ab\cdot\sin C} =$$

$$\frac{2(a^2 + b^2)}{ab\cdot\sin C} - 3\cot C \geqslant \frac{4}{\sin C} - 3\cot C$$

等号当且仅当 $a=b$ 时成立.

设

$$y=\frac{4}{\sin C}-3\cot C=\frac{4-3\cos C}{\sin C}>0$$

则 $$3\cos C+y\cdot\sin C=4$$

有 $$\cos(C-\theta)=\frac{4}{\sqrt{y^2+9}}$$

这里 θ 是由 $\cos\theta=\frac{3}{\sqrt{y^2+9}}$ 定义的，且 $0^\circ<\theta<90^\circ$.

因此，$\frac{4}{\sqrt{y^2+9}}\leqslant 1, y\geqslant\sqrt{7}$.

于是，$\cot\angle ABQ\geqslant\sqrt{7}$，$\angle ABQ\leqslant\arctan\frac{\sqrt{7}}{7}$. 等号仅当 $\angle C=\theta=\arccos\frac{3}{4}$ 时成立.

故 $\angle ABQ$ 的最大值为 $\arctan\frac{\sqrt{7}}{7}$，此时

$$a=b, c^2=a^2+a^2-2a^2\cdot\cos C=\frac{a^2}{2}$$

于是，$a:b:c=\sqrt{2}:\sqrt{2}:1$.

98 设 $ABCD$ 是凸四边形，且 AB 不平行于 CD. 若 X 是四边形 $ABCD$ 内一点，并满足 $\angle ADX=\angle BCX<90^\circ$，$\angle DAX=\angle CBX<90^\circ$，设 AB，CD 的中垂线的交点为 Y，证明：$\angle AYB=2\angle ADX$.

（第 41 届国际数学奥林匹克预选题）

证明 设 Z 是 $\triangle ADX$ 和 $\triangle BCX$ 的外接圆的第二个交点，两外接圆分别记为 Γ_1,Γ_2，圆心分别为 O_1,O_2. 设 W 是 $\triangle ABZ$ 和 $\triangle CDZ$ 的外接圆的第二个交点，分别记为 Γ_3,Γ_4，圆心分别为 O_3，O_4. 下面先证明点 W 与点 Y 重合.

设直线 AB，DC 的延长线交于点 J，若 X 比 Z 更靠近直线 AB，如图 121 所示，则 Z 与 CD 在 AB 的同侧. 设 XC' 和 XD' 分别是 Γ_2 和 Γ_1 的直径，则点 C'，Z，D' 三点共线. 又因为 $\angle DAX$ 和 $\angle CBX$ 均为锐角，所以点 C，D 与 X 在直线 $C'D'$ 的两侧，从而线段 $C'D'$ 上的一点 Z 在区域 AJD 内.



图 121

对于 X，Z 哪一个更靠近 AB，分别有

$$\angle BZX=\angle BCX, \angle AZX=\angle ADX \quad ①$$

或

$$\angle BZX+\angle BCX=180^\circ=\angle AZX+\angle ADX \quad ②$$

但无论哪种情况，均有 $\angle BZX=\angle AZX$，即直线 ZX 平分

$\angle AZB$.

同理，直线 ZX 也平分 $\angle CZD$.

因此，直线 XZ 交圆 Γ_3 和圆 Γ_4 分别于 AB，CD 弧的中点，且在区域 AJD 的外部，分别设为 P，Q. 要证明 W 和 Y 重合，只要证明 $WA = WB$，$WC = WD$，这等价于证明 WP 和 WQ 分别是圆 Γ_3 和圆 Γ_4 的直径，即证明 $WZ \perp XZ$. 因为 $XZ \perp O_1O_2$，$WZ \perp O_3O_4$，所以只要证明 $O_1O_2 \perp O_3O_4$.

由于 $AZ \perp O_1O_3$，$XZ \perp O_1O_2$，则 $\angle O_2O_1O_3$ 与 $\angle AZX$ 要么相等，要么互补.

同理，$\angle O_1O_2O_3$ 与 $\angle BZX$ 有同样的结论.

因为 $\angle AZX = \angle BZX$，则 $\angle O_2O_1O_3$ 与 $\angle O_1O_2O_3$ 要么相等，要么互补.

又由于 A，B 是不同的点，则 $\triangle O_1O_2O_3$ 是一个非退化的三角形. 因此，有 $\angle O_2O_1O_3 = \angle O_1O_2O_3$. 所以，$O_1O_3 = O_2O_3$.

同理，$O_1O_4 = O_2O_4$.

故 $O_1O_2 \perp O_3O_4$. 于是，$W = Y$.

由于 P，Q 在区域 AJD 外部，Z 在区域 AJD 内部，PW，QW 分别垂直于 JA，JD，所以，W 也在区域 AJD 内部. 另一方面，点 Z 和 W 在 AB 同侧，也在 CD 同侧. 由 ①、② 及圆 Γ_3，圆 Γ_1，圆 Γ_2 中内接角的性质，有

$$\angle AWB = \angle AZB = \angle AZX + \angle BZX = \angle ADX + \angle BCX = 2\angle ADX$$

或

$$\angle AWB = \angle AZB = 360^\circ - (\angle AZX + \angle BZX) = \angle ADX + \angle BCX = 2\angle ADX$$

由于 $W = Y$，故结论成立.

99 设 O，H 分别为锐角 $\triangle ABC$ 的外心和垂心. 证明：$\triangle AOH$，$\triangle BOH$，$\triangle COH$ 中有一个的面积等于另外两个面积之和.

（2004 年亚太地区数学奥林匹克）

证明 以 O 为原点建立直角坐标系，不妨设 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 1，如图 122 各顶点坐标分别为 $A(\cos\alpha, \sin\alpha)$，$B(\cos\beta, \sin\gamma)$，$C(\cos\gamma, \sin\gamma)$，则 H 的坐标为$(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma, \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$. 因此，我们有

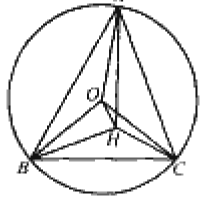


图 122

$$S_{\triangle AOH} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 1 \\ \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma & \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

的绝对值，即有

$S_{\triangle AOH}=\frac{1}{2}|\cos\alpha(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)-\sin\alpha(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)|$

同理可得

$S_{\triangle BOH}=\frac{1}{2}|\cos\beta(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)-\sin\beta(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)|$

$S_{\triangle COH}=\frac{1}{2}|\cos\gamma(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)-\sin\gamma(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)|$

去绝对值后，我们总可以选取恰当的 ± 号，使得

$\pm S_{\triangle AOH}\pm S_{\triangle BOH}\pm S_{\triangle COH}=$

$\frac{1}{2}[\cos\alpha(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)-\sin\alpha(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)]+$

$\frac{1}{2}[\cos\beta(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)-\sin\beta(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)]+$

$\frac{1}{2}[\cos\gamma(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)-\sin\gamma(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)]=0$

这表明 $\triangle AOH$，$\triangle BOH$，$\triangle COH$ 中有一个面积等于另两个面积之和.

(100) 在凸四边形 $ABCD$ 中，两对角线 AC 与 BD 互相垂直，两对边 AB 与 DC 不平行，点 P 为线段 AB 及 CD 的垂直平分线的交点，且 P 在四边形 $ABCD$ 的内部. 证明：$ABCD$ 为圆内接四边形的充分必要条件是 $\triangle ABP$ 与 $\triangle CDP$ 的面积相等.

（第 39 届国际数学奥林匹克）

证明　因 AB 不平行 CD，令 E 是 AB 和 CD 的交点，如图 123 所示，因 P 是 AB 及 CD 的垂直平分线的交点. 设 AB，CD 的中点分别为 M，N，AC 与 BD 交于 Q，所以 $PM\perp AB$，$PN\perp PC$. 故由 $S_{\triangle ABP}=S_{\triangle PCD}$，知

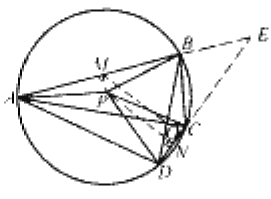


图 123

$$\frac{1}{2}AB\cdot MP=\frac{1}{2}CD\cdot PN$$

又由 Rt$\triangle AQB$ 及 Rt$\triangle CQD$ 知

$$\frac{1}{2}AB=MQ=AM=BM,\frac{1}{2}CD=QN=DN=CN$$

所以
$$MQ\cdot MP=QN\cdot PN$$
即
$$\frac{MQ}{QN}=\frac{PN}{PM} \qquad ①$$

又 $PM\perp AB$，$PN\perp CD$，知

$$\angle MPN=180°-\angle E=\angle BDE+\angle DBE=$$
$$\angle QDC+(\angle AQB+\angle BAQ)=$$

$$\angle QDC + 90^\circ + \angle BAQ =$$
$$\angle DQN + 90^\circ + \angle AQM = \angle MQN \quad ②$$

由①,②知 $\triangle MPN \backsim \triangle MQN$. 从而

$$\frac{MP}{QN} = \frac{PN}{MQ} = \frac{MN}{NM} = 1$$

有 $MP = QN, PN = MQ$, 得 $MP = QN = NC, PN = MQ = MB$, 知 $Rt\triangle BMP \cong Rt\triangle PNC$. 所以, $PB = PC$.

由题设 P 是 AB、CD 中垂线的交点知 $PB = PA, PC = PD$.

故 $PA = PB = PC = PD$. 所以, A,B,C,D 四点共圆.

101 给定 $\lambda > 1$, 设点 P 是 $\triangle ABC$ 外接圆的弧 BAC 上的一个动点, 在射线 BP 和 CP 上分别取点 U 和 V, 使得 $BU = \lambda BA$, $CV = \lambda CA$, 在射线 UV 上取点 Q, 使得 $UQ = \lambda UV$. 求点 Q 的轨迹.

(第 38 届国际数学奥林匹克中国国家队选拔赛试题)

证明　如图 124, 联结 AU, AV, AQ. 在 BC 延长线上取点 D, 使 $BD = \lambda BC$. 联结 AD, QD. 因为

$$CV = \lambda CA, BU = \lambda BA, \angle ACV = \angle ABU$$

所以 $$\triangle AVC \backsim \triangle AUB$$

所以 $$\frac{AU}{AV} = \frac{AB}{AC}, \angle VAC = \angle UAB$$

所以 $$\angle UAV = \angle BAC$$

所以 $$\triangle AUV \backsim \triangle ABC$$

所以 $$\frac{UV}{BC} = \frac{AU}{AB}, \angle AUV = \angle ABC$$

又因为

$$UQ = \lambda UV, BD = \lambda BC$$

所以 $$\frac{UQ}{BD} = \frac{UV}{BC} = \frac{AU}{AB}$$

所以 $$\triangle AUQ \backsim \triangle ABD$$

所以 $$\triangle AVQ \backsim \triangle ACD$$

所以 $$\triangle AQD \backsim \triangle AVC$$

所以 $$\frac{QD}{VC} = \frac{AD}{AC}$$

所以 $$QD = \frac{VC \cdot AD}{AC} = \lambda AD$$

这表明点 Q 位于以点 D 为圆心, 以 λAD 为半径的圆上.

当点 P 运动到点 B 和点 C 时, 射线 BP 和 CP 分别变为过点 B 和 C 的切线. 这时所分别得到的点 Q' 和 Q'' 即为轨迹弧的端点.

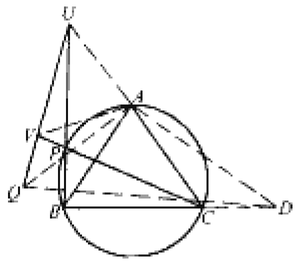


图 124

⑩② 定圆上两定点 A,B 及动点 C 构成的 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，AB 的中点 M 在边 AC,BC 上的投影分别为点 E,F. 证明：EF 的中垂线经过一定点.

（2002 年保加利亚国家数学奥林匹克(地区级)）

证明 如图 125，设 K,L 分别是 AM,BM 的中点，D 是 AB 中垂线上一点，且 C,D 在直线 AB 的异侧，$\angle DKL=\angle ACB$. 若 $\angle BAC=\angle ABC$，结论显然成立.

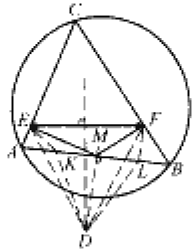


图 125

不妨假设 $\angle BAC>\angle ABC$，于是

$$\angle DLF=\angle DLK+\angle KLF=\angle ACB+2\angle ABC$$

$$\angle DKE=360^\circ-\angle DKL-\angle LKE=$$
$$360^\circ-\angle ACB-2\angle BAC=$$
$$\angle ACB+2\angle ABC=\angle DLF$$

又 $$DL=DK,LF=KE=\frac{1}{4}AB$$

所以，$\triangle DLF\cong\triangle DKE$. 故 $DF=DE$，即点 D 在 EF 的中垂线上.

注 利用对称性知所求定点在 AB 的中垂线上.

⑩③ 设 AB 是圆 O 的直径，过点 A,B 的切线分别为 l_a,l_b. C 是圆周上任意一点，BC 交 l_a 于 K，$\angle CAK$ 的平分线交 CK 于 H. 设 M 是弧 $\overset{\frown}{CAB}$ 的中点，HM 与圆 O 交于点 S，过点 M 的切线与 l_b 交于点 T. 证明：S,T,K 三点共线.

（第 19 届伊朗数学奥林匹克(第 2 轮)）

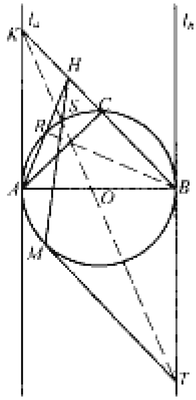


图 126

证明 如图 126，设 AH 交圆 O 于点 R，则 $\angle ARB=90^\circ$，且 BR 为 $\angle CBA$ 的平分线，所以 $\triangle HAB$ 是等腰三角形，且 $HB=AB$.

又因为 M 是弧 $\overset{\frown}{CAB}$ 的中点，所以 $MT\parallel BC$. 由于 AH 平分 $\angle CAK$，则

$$\frac{HK}{HC}=\frac{AK}{AC}=\frac{KB}{AB},HK=\frac{KB\cdot HC}{AB}$$

因为 $$HS\cdot HM=HC\cdot HB$$

则 $$HS=\frac{HC\cdot HB}{HM}$$

由 $S_{\triangle ABT}=S_{\triangle KBT}=S_{\triangle KBM}$，得

$$AB\cdot BT=HM\cdot KB\cdot\sin\angle MHB$$

因为 $$\angle MHB\xlongequal{m}\frac{1}{2}(\overset{\frown}{MB}-\overset{\frown}{SC})=\frac{1}{2}\overset{\frown}{MAS}$$

所以 $$\sin\angle MHB=\frac{SM}{AB}$$

从而 $$AB\cdot BT=HM\cdot KB\cdot\frac{SM}{AB}$$

$$\frac{MT}{SM}=\frac{BT}{SM}=\frac{KB}{AB}\cdot\frac{HM}{AB}=\frac{KB}{AB}\cdot\frac{HM}{HB}$$

又 $$\frac{HK}{HS}=\frac{KB}{AB}\cdot\frac{HM}{HB}$$

所以 $$\frac{MT}{SM}=\frac{HK}{HS}$$

由 $\angle SMT=\angle SHK$，得 $\triangle SMT\backsim\triangle SHK$，故 $\angle TSM=\angle KSH$. 从而，S,T,K 三点共线.

104 设 M,N 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AC,BC 上的点，K 是线段 MN 的中点，$\triangle CAN$ 和 $\triangle BCM$ 的外接圆的第二个交点为 D. 证明：CD 经过 $\triangle ABC$ 的外心的充要条件是 AB 的中垂线经过点 K.

（第 43 届国际数学奥林匹克希腊选拔赛试题）

证明　设 O 是 $\triangle ABC$ 的外心，CO 交 AB 于点 C_1，CD 交 AB 于点 P. 在图 127 中

$$\frac{AC_1}{BC_1}=\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 2}=\frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle BOC}=\frac{\sin 2B}{\sin 2A}$$

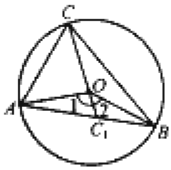


图 127

则 CD 过点 O 等价于 $P=C_1$，即

$$\frac{AP}{BP}=\frac{\sin 2B}{\sin 2A}$$

如图 128，设 M_1,K_1,N_1 分别是 M,K,N 在 AB 上的投影. AB 的中垂线过点 K 等价于 $AM_1=BN_1$，即

$$\frac{AM}{BN}=\frac{\cos B}{\cos A}$$

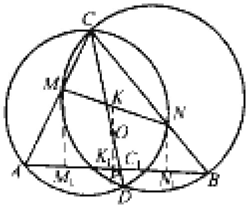


图 128

因为 $$\angle MAD=\angle BND,\angle AMD=\angle NBD$$

则 $\triangle AMD\backsim\triangle NBD$，故

$$\frac{AM}{BN}=\frac{MD}{BD}=\frac{\sin\angle ACD}{\sin\angle BCD}$$

从而 $$\frac{AP}{BP}=\frac{\sin\angle ACP\cdot\dfrac{CP}{\sin A}}{\sin\angle BCP\cdot\dfrac{CP}{\sin B}}=\frac{AM\cdot\sin B}{BN\cdot\sin A}=$$

$$\frac{\cos B\cdot\sin B}{\cos A\cdot\sin A}=\frac{\sin 2B}{\sin 2A}$$

故结论成立.

⑩⑤ 如图 129，已知两个半径不等的圆相交于 A,B 两点，公切线 ST,MN 与两个圆的切点分别为 S,T 和 M,N. 证明：$\triangle AMN$，$\triangle AST$，$\triangle BMN$，$\triangle BST$ 的垂心是一个矩形的四个顶点.

（第 19 届巴尔干地区数学奥林匹克）

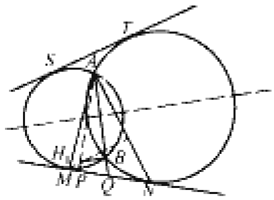


图 129

证明 设 $\triangle AMN$，$\triangle AST$，$\triangle BMN$，$\triangle BST$ 的垂心分别为 H_1，H_2，H_3，H_4，由对称性知四边形 $H_1H_2H_3H_4$ 是等腰梯形，其中 $H_1H_4 /\!/ AB /\!/ H_2H_3$，所以只须证 $H_1B \perp AB$.

设 P,Q 分别为 AH_1，AB 与 MN 的交点，则 Q 为 MN 的中点. 设 AH_1 与 $\triangle AMN$ 的外接圆交于 D，则

$$H_1P = PD, PM \cdot PN = PD \cdot PA = PH_1 \cdot PA$$

于是

$$\begin{aligned}AH_1 \cdot AP &= (AP - H_1P)AP = AP^2 - PM \cdot PN = \\ &AQ^2 - PQ^2 - (MQ - PQ)(NQ + PQ) = \\ &AQ^2 - PQ^2 - MQ^2 + PQ^2 = AQ^2 - AQ \cdot BQ = \\ &AQ(AQ - BQ) = AQ \cdot AB\end{aligned}$$

所以，H_1，P，Q，B 四点共圆.

又因为 $AP \perp MN$，所以，$H_1B \perp AB$.

⑩⑥ 已知半圆圆 O 的直径为 AB，C 为 OB 上一点，过点 C 且垂直于 AB 的直线交半圆圆 O 于点 D，圆 P 与半圆圆 O 内切于点 F，与 CD 切于点 E，与 CB 切于点 G. 证明：$\triangle ADG$ 为等腰三角形.

（2003 年意大利数学竞赛）

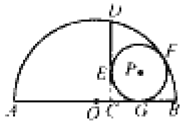


图 130

证明 如图 130，因为 F,P,O 三点共线，且 $PE /\!/ AB$，所以，$\angle EPF = \angle AOF$.

因为 $\triangle PEF$ 和 $\triangle OAF$ 均为等腰三角形，所以，$\angle PFE = \angle OFA$. 从而，F,E,A 三点共线.

由射影定理可得

$$AD^2 = AC \cdot AB$$

由切割线定理有 $$AG^2 = AE \cdot AF$$

又因为 $\triangle AEC \backsim \triangle ABF$，所以

$$AC \cdot AB = AE \cdot AF$$

从而，$AD = AG$，即 $\triangle ADG$ 为等腰三角形.

(107) 已知平面上三定点 A,B,C，设动点 D 满足 A,B,C,D 共圆．l_A,l_B,l_C,l_D 分别是点 A,B,C,D 关于 $\triangle BCD,\triangle ACD,\triangle ABD,\triangle ABC$ 的西姆松线．当点 D 移动时，求直线 l_A,l_B,l_C,l_D 的交点轨迹．

（2002 年中国台湾地区数学奥林匹克）

证明 如图 131，设点 O,H 分别是 $\triangle ABC$ 的外心和垂心．若 A',C' 分别是 BC,AB 的中点，则 $AH\ /\!/\ OA',CH\ /\!/\ OC',AC\ /\!/\ A'C'$．故 $\triangle AHC\backsim\triangle A'OC'$，有 $AH=2A'O$．记 AA' 与 OH 交于点 G'，则 $\triangle A'G'O\backsim\triangle AG'H$．所以，$AG'=2A'G',G'H=2OG'$．故 G' 是 $\triangle ABC$ 的垂心．

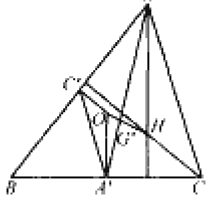


图 131

设直线 h_A 通过点 A 和 $\triangle BCD$ 的垂心 H_A，直线 h_B 通过点 B 和 $\triangle ACD$ 的垂心 H_B，直线 h_C 通过点 C 和 $\triangle ABD$ 的垂心 H_C，直线 h_D 通过点 D 和 $\triangle ABC$ 的垂心 H_D．为了方便起见，对每一点 P 用 $\overrightarrow{P}$ 代表向量 $\overrightarrow{OP}$，易知 $\triangle BCD$ 的重心 G_A 满足 $\overrightarrow{G_A}=\dfrac{\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}+\overrightarrow{D}}{3}$．因为 H_A 是 $\triangle BCD$ 的垂心，根据前面所述，有 $|G_AH_A|=2|OG_1|$，即

$$\overrightarrow{H_A}-\overrightarrow{G_A}=2\overrightarrow{G_A}$$

满足
$$\overrightarrow{H_A}=3\overrightarrow{G_A}=\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}+\overrightarrow{D}$$

类似地
$$\overrightarrow{H_B}=3\overrightarrow{G_B}=\overrightarrow{A}+\overrightarrow{C}+\overrightarrow{D}$$

$$\overrightarrow{H_C}=3\overrightarrow{G_C}=\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{D},\overrightarrow{H_D}=3\overrightarrow{G_D}=\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}$$

由此
$$\overrightarrow{S}=\frac{\overrightarrow{A}+\overrightarrow{H_A}}{2}=\frac{\overrightarrow{B}+\overrightarrow{H_B}}{2}=\frac{\overrightarrow{C}+\overrightarrow{H_C}}{2}=\frac{\overrightarrow{D}+\overrightarrow{H_D}}{2}=\frac{\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}+\overrightarrow{C}+\overrightarrow{D}}{2}$$

故 h_A,h_B,h_C,h_D 共点．

如图 132，过点 D 分别作 BC,CA,AB 的垂线，垂足分别为 L,M,N．则 L,M,N 共线，此直线即为点 D 关于 $\triangle ABC$ 的西姆松线 l_D．

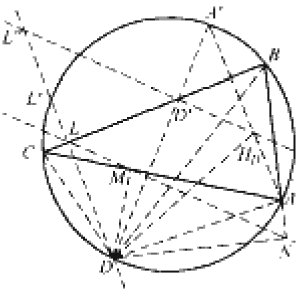


图 132

若 L' 是 DL 与 $\triangle ABC$ 外接圆的交点，由 $\angle AL'D=\angle ACD=\angle MLD$ 有 $AL'\ /\!/\ LM$．设 A' 为 AH_D 与 $\triangle ABC$ 外接圆的另一交点．因为 $\angle A'CB=\angle A'AB=\angle BCH_D$，故 BC 是 $A'H_D$ 的垂直平分线．设 $A'D$ 与 BC 交于点 D'，$D'H_D$ 与 DL 交于点 L''．则 L 是 DL'' 中点．由 $\angle D'L''L=\angle A'=\angle AL'D$，知 $H_DL''\ /\!/\ AL'\ /\!/\ LMN$，因此，$l_D$ 即为 LMN，经过 DH_D 的中点．同理，l_A 过 AH_A 的中点，l_B 过 BH_B 的中点，l_C 过 CH_C 的中点．根据前面结论，这些中点为同一点 S．则 l_A,l_B,l_C,l_D 交于点 S．当 D 移动时，$\overrightarrow{S}=\dfrac{\overrightarrow{D}+\overrightarrow{H_D}}{2}$ 是 DH_D 的中点．因为

$\vec{H}_D=\vec{H}$,所以

$$\left|\vec{S}-\frac{\vec{H}}{2}\right|=\left|\frac{\vec{D}}{2}\right|=\frac{R}{2}$$

这里,R 是 $\triangle ABC$ 外接圆半径.即 S 的轨迹是以线段 OH 中点为圆心,$\frac{R}{2}$ 为半径的圆.

⑩⑧ 设点 A 是圆 O 外一点,过点 A 作圆 O 的切线,切点分别为 B,C.圆 O 的切线 l 与 AB,AC 分别交于点 P,Q.过点 P 且平行于 AC 的直线与 BC 交于点 R.证明:无论 l 如何变化,QR 恒过一定点.

(2002 ~ 2003 年伊朗数学奥林匹克)

证明 如图 133,过点 O 作垂直于 AO 的直线分别交 AB,AC 于点 D,E.

我们断言 QR 恒过点 D.

设 DQ 与 BC 交于点 S,只须证 PS // AC,即 $S=R$.

设切线 PQ 与圆 O 切于点 T.记

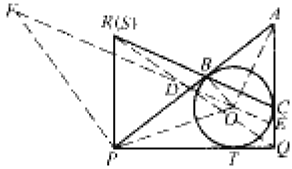


图 133

$$\alpha=\angle BOD=\angle COE=\angle BAO=\angle CAO$$

$$\beta=\angle BPO=\angle TPO$$

$$\gamma=\angle CQO=\angle TQO$$

则
$$2(\alpha+\beta+\gamma)=\pi$$

$$\angle AOP=\pi-\alpha-\beta=\frac{\pi}{2}+\gamma$$

过点 P 作 AB 的垂线与 ED 的延长线交于点 F,则 A,P,O,F 四点共圆(以 AF 为直径),即有

$$\angle AFP=\pi-\angle AOP=\frac{\pi}{2}-\gamma$$

由 PF // BO,知 $\angle PFD=\alpha$.由对应角相等可得

$$\triangle AFD\backsim\triangle QOE,\triangle PFD\backsim\triangle COE$$

故
$$\frac{AP}{PD}=\frac{QC}{CE}$$

由于 CS // DE,知

$$\frac{QC}{CE}=\frac{QS}{SD}$$

因此
$$\frac{AP}{PD}=\frac{QS}{SD}$$

于是 PS // AQ.由于 AQ 与 AC 为同一直线,故 PS // AC.

⑩⑨ 设 I 是 $\triangle ABC$ 的内心，且圆 I 与 AB，BC 分别切于点 X，Y，XI 与圆 I 交于另一点 T，X' 是 AB，CT 的交点. L 在线段 $X'C$ 上，且 $X'L=CT$. 证明：当且仅当 A，L，Y 三点共线时 $AB=AC$.

（2002 - 2003 年伊朗数学奥林匹克）

证明　如图 134，设过内切圆上点 T 的切线分别交 BC，AC 于点 E，F. 由于 EF，AB 都是直径 XT 的垂线，所以，$EF\,/\!/\,AB$.

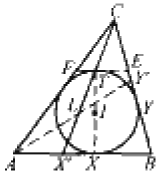


图 134

又 T 是 $\triangle CEF$ 的旁切圆与 EF 的切点，故 X' 是 $\triangle ABC$ 的旁切圆与 AB 的切点.

记 p 为 $\triangle ABC$ 的半周长，a，b，c 分别为顶点 A，B，C 所对边的边长. 则有

$$AX'=BX=p-b$$

设 AL 与 BC 交于点 Y'. 由正弦定理得

$$\frac{CY'}{BY'}=\frac{CY'}{AY'}\cdot\frac{AY'}{BY'}=\frac{\sin A_1}{\sin C}\cdot\frac{\sin B}{\sin A_2}=$$

$$\frac{\sin B}{\sin C}\cdot\frac{\sin A_1}{\sin C_1}\cdot\frac{\sin X_1'}{\sin A_2}\cdot\frac{\sin C_1}{\sin X_1'}=$$

$$\frac{b}{c}\cdot\frac{CL}{AL}\cdot\frac{AL}{X'L}\cdot\frac{AX'}{b}=\frac{p-b}{c}\cdot\frac{CL}{X'L}\qquad①$$

其中，$\angle A_1=\angle CAY'$，$\angle A_2=\angle BAY'$，$\angle C_1=\angle ACX'$，$\angle X_1'=\angle AX'C$.

因为 $AB\,/\!/\,EF$，所以

$$\frac{CT}{CX'}=\frac{r}{r_C}=\frac{S}{p}\cdot\frac{p-c}{S}=\frac{p-c}{p}$$

其中，r，r_C 分别表示 $\triangle ABC$ 的内切圆半径和对应点 C 的旁切圆半径，S 为 $\triangle ABC$ 的面积.

因为 $CT=X'L$，$X'T=CL$，所以

$$\frac{X'L}{CL}=\frac{p-c}{c}\qquad②$$

由 ①，② 知

$$\frac{CY'}{BY'}=\frac{p-b}{c}\cdot\frac{c}{p-c}=\frac{p-b}{p-c}$$

故 Y' 是对应点 A 的 $\triangle ABC$ 的旁切圆与边 BC 的交点，$BY'=p-c$. 又 $BY=p-b$，则 A，L，Y 三点共线当且仅当 $Y=Y'$，即 $BY=BY'$.

因此，$p-b=p-c$，即 $b=c$，$AB=AC$.

110 给定菱形 $ABCD$，其中 $\angle A < 90°$，两条对角线 AC，BD 相交于点 M. 点 O 在线段 MC 上，并满足 $O \neq M$，且 $OB < OC$. 过点 B，D 且以 O 为圆心的圆交直线 AB 于点 B 和点 X（当直线 AB 是该圆的切线时，$X = B$），同时交直线 BC 于点 B 和点 Y. 设直线 DX，DY 与线段 AC 的交点分别为 P，Q. 试用 t 表示比值 $\frac{OQ}{OP}$，其中 $\frac{MA}{MO} = t$.

（2003 年韩国数学奥林匹克）

证明 分三种情形讨论.

1）$\angle ABO < 90°$，即 X 在线段 AB 上.

这时，由于 $\triangle XOD$ 是等腰三角形，则有 $\angle OXD = \angle ODX$.

由于 $\angle BXD = \angle DOC$，则 $AXD = \angle AOD$.

因此，A，X，O，D 四点共圆. 故 $\angle OXD = \angle ODX = \angle OAX$.

直线 OX 是 $\triangle AXP$ 的外接圆的切线，则有

$$OX^2 = OP \cdot OA \quad ①$$

另一方面，由于 $\triangle OYD$ 是等腰三角形，则 $\angle ODY = \angle OYD$.

由于 $\angle BYD = \angle MOD$，则 $\angle CYD = \angle COD$.

因此，O，Y，C，D 四点共圆. 故 $\angle ODY = \angle OYD = \angle OCY$.

于是，OY 是 $\triangle QYC$ 的外接圆的切线. 故

$$OY^2 = OQ \cdot OC \quad ②$$

由 ①，② 可得

$$\frac{OQ}{OP} = \frac{\frac{OY^2}{OC}}{\frac{OX^2}{OA}} = \frac{OA}{OC} = \frac{MA + OM}{MC - OM} = \frac{\frac{MA}{OM} + 1}{\frac{MA}{OM} - 1} = \frac{t + 1}{t - 1} \quad ③$$

2）$\angle ABO = 90°$，即 $X = B$.

这时，可以导出 $P = M$，而 $\triangle AXO$ 与 $\triangle XOP$ 是相似的直角三角形，因此

$$OX^2 = OP \cdot OA$$

这就是式 ①. 如同第一种情况，① 与 ② 都成立，因而 ③ 也成立.

3）$\angle ABO > 90°$，即 B 在线段 AX 上.

这时，利用与第一种情况相同的方法，可以证明 ① 与 ② 都成立，因而 ③ 也成立.

(111) 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$、$\overset{\frown}{AB}$ 的中点分别为 D，E，F，其中 $A\notin\overset{\frown}{BC}$，$B\notin\overset{\frown}{CA}$，$C\notin\overset{\frown}{AB}$．$DE$ 分别交 CB，CA 于点 G，H，DF 分别交 BC，BA 于点 I，J，GH 和 IJ 的中点分别为 M，N．(1) 用 $\triangle ABC$ 的内角表示 $\triangle DMN$ 的三个内角；(2) 若 O 为 $\triangle DMN$ 的外心，P 是 AD 与 EF 的交点，证明：O，M，P，N 四点共圆．

（2003 年巴尔干地区数学奥林匹克）

证明　(1) 因为

$$\angle BJI=\frac{\overset{\frown}{AF}^{\circ}}{2}+\frac{\overset{\frown}{BD}^{\circ}}{2}=\frac{\overset{\frown}{BF}^{\circ}}{2}+\frac{\overset{\frown}{CD}^{\circ}}{2}=\angle BIJ$$

所以 $BI=BJ$．

从而，BN 是 $\angle ABC$ 的平分线，则 B，N，E 三点共线，$BN\perp IJ$．如图 135 所示．

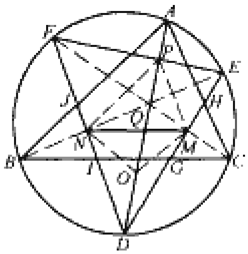


图 135

同理，$CM\perp GH$．

因此，D，N，Q，M 四点共圆．进而，有

$$\angle DNM=\angle DQM=\frac{\overset{\frown}{AF}^{\circ}+\overset{\frown}{CD}^{\circ}}{2}=\frac{\angle A+\angle C}{2}$$

$$\angle DMN=\frac{\angle A+\angle B}{2},\angle MDN=\frac{\angle B+\angle C}{2}$$

(2) 同理

$$\angle NPF=\frac{\angle B+\angle C}{2},\angle EPM=\frac{\angle B+\angle C}{2}$$

从而　$$\angle NOM=2\angle MDN=\angle B+\angle C$$

$$\angle NPM=\pi-\angle NPF-\angle EPM=\pi-\angle B-\angle C$$

所以 N，O，M，P 四点共圆．

(112) 设 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，P，Q 为边 BC 上的两个点．作 $QC_1\parallel CA$，与 $\triangle ABP$ 的外接圆交于点 C_1，且 C_1 和 Q 在直线 AB 的异侧；作 $QB_1\parallel BA$，与 $\triangle ACP$ 的外接圆交于点 B_1，且 B_1 和 Q 在直线 AC 的异侧．证明：B_1，C_1，Q，P 四点共圆．

（2005 年第 34 届美国数学奥林匹克）

证明　如图 136，设 $\triangle ABC$ 的三个内角分别为 α，β，γ．不失一般性，假设点 Q 在线段 BP 的内部．

设 C_1A 的延长线与 $\triangle ACP$ 的外接圆交于点 B_2．

因 $\angle PC_1A=\angle PBA=\beta$，$\angle AB_2P=\angle ACP=\gamma$，则

$$\triangle PC_1B_2 \backsim \triangle ABC$$

由 $QC_1 \parallel CA$，有 $\angle PQC_1 = \pi - \gamma$，所以，$P, Q, C_1, B_2$ 四点共圆．于是

$$\angle B_2QC_1 = \angle B_2PC_1 = \angle CAB = \alpha$$

因此
$$\angle PQB_2 = \pi - \gamma - \alpha = \beta$$

故 $QB_2 \parallel AB$，所以，$B_1 = B_2$．则 B_1, C_1, Q, P 四点共圆．

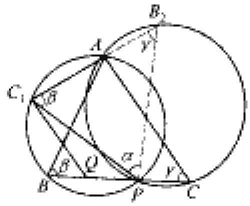


图 136

⑪③ 半圆 Γ 的直径是 AB，M 是 AB 的中点．在半圆 Γ 的同侧，以 MB 为直径作半圆 Γ_1．设 X, Y 是半圆 Γ_1 上的点，且 $\overset{\frown}{BX} = 1.5\overset{\frown}{BY}$．直线 MY 交 BX 于点 D，交半圆 Γ 于点 C．证明：Y 是线段 CD 的中点．

（2005 年第 36 届奥地利数学奥林匹克）

证明 如图 137，取 $\overset{\frown}{BY}$ 的中点 Z，设 BZ, MY 相交于点 E．在半圆 Γ_1 中，$\angle MZB$ 是直径 MB 所对的圆心角，于是，$MZ \perp BZ$．

因为 $\overset{\frown}{BZ} = \overset{\frown}{ZY}$，所以，$\angle YMZ = \angle BMZ$．

在 $\triangle MZB$ 和 $\triangle MZE$ 中，由于

$$\angle EMZ = \angle BMZ, MZ = MZ$$
$$\angle MZE = \angle MZB = 90^\circ$$

所以
$$\triangle MZB \cong \triangle MZE$$

故
$$ME = MB$$

因此，点 E 和 C 重合．

又 $\angle MYB$ 是直径 MB 所对的圆心角，于是

$$MY \perp BY$$

因为 $\overset{\frown}{ZY} = \overset{\frown}{YX}$，所以，$\angle ZBY = \angle YBX$．

同理，$\triangle BYC \cong \triangle BYD$．故 $CY = DY$．

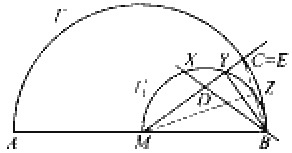


图 137

⑪④ 已知等边 $\triangle ABC$ 和等边 $\triangle PQR$ 有三组边分别平行，一个指向上方，另外一个指向下方，相交的部分是一个六边形．证明：这个六边形的相对的顶点的连线相交于一点．

（2005 年第 36 届奥地利数学奥林匹克）

证明 如图 138，六边形的边 A_1A_2 和 A_4A_5 分别在平行线 AC 和 RQ 上，PM 和 BN 分别是等边 $\triangle PQR$ 和等边 $\triangle ABC$ 的高，所以，$PM = BN$．

又 AC 和 QR 平行，则 $EM = FN$．所以，$PE = BF$．

因为 $\triangle PA_1A_2$ 和 $\triangle BA_4A_5$ 是等边三角形，所以，这两个等边三角形的边相等，即 $A_1A_2 = A_4A_5$.

由于边 A_1A_2 和 A_4A_5 不仅相等而且平行，所以，四边形 $A_1A_2A_4A_5$ 是平行四边形，对角线 A_1A_4 和 A_2A_5 相交且平分.

同理可知，四边形 $A_2A_3A_5A_6$ 也是平行四边形，对角线 A_2A_5 和 A_3A_6 相交且平分.

故三条对角线都相交于一点.

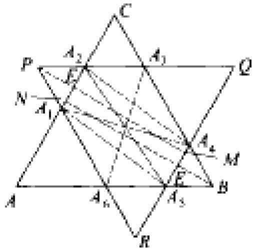


图 138

⑪⑮ 已知锐角 $\triangle ABC$，以 AC 为直径的圆为圆 Γ_1，以 BC 为直径的圆为圆 Γ_2，AC 与圆 Γ_2 相交于点 E，BC 与圆 Γ_1 相交于点 F，直线 BE 和圆 Γ_1 相交于点 L，N，其中点 L 在线段 BE 上，直线 AF 和圆 Γ_2 相交于点 K，M，其中点 K 在线段 AF 上. 证明：四边形 $KLMN$ 是圆内接四边形.

（2005 年第 36 届奥地利数学奥林匹克）

证明 如图 139，在圆 Γ_2 中，BC 是直径，点 E 是 AC 和圆 Γ_2 的交点，则 $\angle BEC = 90°$.

同理，由 F 是 BC 和圆 Γ_1 的交点，得 $\angle AFC = 90°$.

因为 $\angle AEB = \angle AFB = 90°$，则点 E，F 在以 AB 为直径的圆上，有

$$CE \cdot CA = CF \cdot CB$$

易知 $\triangle ACL$ 是直角三角形，LE 是它的高线. 故

$$CE \cdot CA = CL^2$$

同理，在 $\triangle BCK$ 中，有

$$CF \cdot CB = CK^2$$

由 $CE \cdot CA = CF \cdot CB$，有 $CL^2 = CK^2$，即 $CL = CK$.

又 LN 垂直于圆 Γ_1 的直径 AC，则 $CL = CN$.

同理，在圆 Γ_2 中，有 $CK = CM$.

综上，线段 CK，CL，CM 和 CN 都相等.

则点 K，L，M，N 在以点 C 为圆心的圆上.

故四边形 $KLMN$ 是一个圆内接四边形.

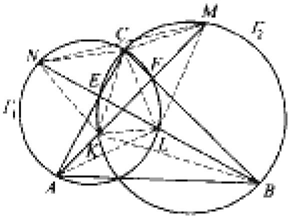


图 139

⑪⑯ 已知 $\triangle ABC$，过点 B，C 的圆 O 与 AC，AB 分别交于点 D，E，BD 与 CE 交于点 F，直线 OF 与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 P. 证明：$\triangle PBD$ 的内心就是 $\triangle PCE$ 的内心.

（2004 年泰国数学奥林匹克试题）

证明　先证几个引理.

引理1：四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，对角线 AC，BD 交于 E，直线 BA，CD 交于 F，记圆 O 的半径为 r，则

$$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}=r^2$$

引理1的证明：如图140，过 F 作圆 O 的两条切线 FP，FQ. 由 $\triangle FPA\backsim\triangle FBP$，得

$$\frac{AP}{PB}=\frac{FA}{FP}=\frac{FP}{FB}$$

所以

$$\left(\frac{AP}{PB}\right)^2=\frac{FA}{FB}$$

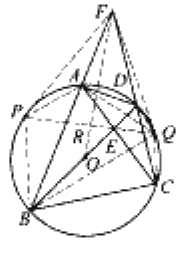


图140

由 $\triangle FDQ\backsim\triangle FQC$，得

$$\frac{DQ}{QC}=\frac{FD}{FQ}=\frac{FQ}{FC}$$

所以

$$\left(\frac{DQ}{QC}\right)^2=\frac{FD}{FC}$$

由 $\triangle FAD\backsim\triangle FCB$，得

$$\frac{BC}{AD}=\frac{FB}{FD}=\frac{FC}{FA}$$

所以

$$\left(\frac{BC}{AD}\right)^2=\frac{FB\cdot FC}{FD\cdot FA}$$

三式相乘得

$$\left(\frac{AP}{PB}\right)^2\cdot\left(\frac{DQ}{QC}\right)^2\cdot\left(\frac{BC}{AD}\right)^2=1$$

则

$$\frac{AP}{PB}\cdot\frac{BC}{CQ}\cdot\frac{QD}{DA}=1$$

故

$$\frac{\sin\angle AQP}{\sin\angle PQB}\cdot\frac{\sin\angle BAC}{\sin\angle CAQ}\cdot\frac{\sin\angle QBD}{\sin\angle DBA}=1$$

由角元塞瓦逆定理知，BD，AC，QP 三线共点.

所以，E 在 PQ 上.

联结 OF 交 PQ 于 R. 因为 $OF\perp PQ$，则

$$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{OF}=(\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{RE})\cdot\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{RE}\cdot\overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OF}=r^2$$

引理2：四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，对角线 AC，BD 交于 E，直线 BA，CD 交于 F，直线 AD，BC 交于 G. 记圆 O 的半径为 r，则

$$OE\perp FG$$

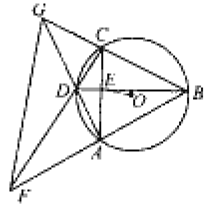


图141

引理2的证明：如图141，由引理1得

$$\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{OE}\cdot(\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OF})=OE\cdot\overrightarrow{OG}-OE\cdot\overrightarrow{OF}=r^2-r^2=0$$

所以，$OE\perp FB$.

引理3：四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，直线 BA，CD 交于 F，$\triangle FAD$

的外接圆和 $\triangle FBC$ 的外接圆交于点 P(异于点 F)．则 $OP \perp PF$．

引理 3 的证明：作辅助线如图 142 所示．因为

$$\angle APC = \angle FPC - \angle FPA = 180^\circ - \angle B - \angle FDA = 180^\circ - 2\angle B = 180^\circ - \angle AOC$$

所以，A, P, C, O 四点共圆．故

$$\angle FPO = \angle FPC - \angle OPC = 180^\circ - \angle B - \angle OAC = 180^\circ - \angle B - (90^\circ - \angle B) = 90^\circ$$

因此 $$OP \perp PF$$

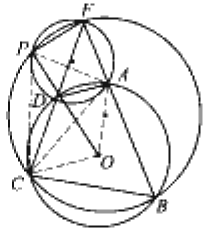


图 142

引理 4：设 P 是半径为 r 的圆 O 上的一动点，A, B 是过圆心 O 的一条射线上的两定点且满足 $OA \cdot OB = r^2$．则 $\frac{PA}{PB}$ 是定值．

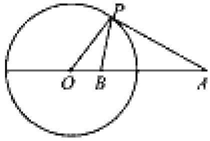


图 143

引理 4 的证明：如图 143，设 $OA = kr$，$OB = \frac{1}{k}r$，$\angle POA = \alpha$．则

$$PA^2 = PO^2 + OA^2 - 2PO \cdot OA \cdot \cos\alpha = r^2(k^2 + 1 - 2k\cos\alpha)$$

$$PB^2 = PO^2 + OB^2 - 2PO \cdot OB \cdot \cos\alpha = r^2\left(1 + \frac{1}{k^2} - 2 \cdot \frac{1}{k}\cos\alpha\right)$$

所以 $$PB^2 = \frac{1}{k^2}PA^2$$

故 $\frac{PA}{PB} = k$ 为定值．

下面证明原题．

作辅助线如图 144 所示．设直线 CB，DE 交于 Q，QA 交 $\triangle ABC$ 的外接圆于一点 P'(异于点 A)．

因为 $QP' \cdot QA = QB \cdot QC = QE \cdot QD$，所以，$P', E, D, A$ 四点共圆．

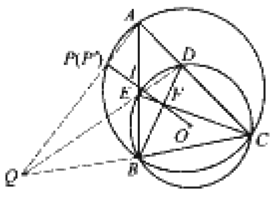


图 144

由引理 3，$OP' \perp QA$．

由引理 2，$OF \perp QA$．

所以，O, F, P' 三点共线．

因此，P' 和 P 是同一点．

设圆 O 的半径为 r，则

$$OF \cdot OP = \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OF}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}) = \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OA} = r^2$$

设 OP 与圆 O 交于 I．由引理 4，$\frac{PB}{BF} = \frac{PI}{IF}$．

所以，BI 平分 $\angle PBF$．

同理，DI 平分 $\angle PDF$．

于是，I 是 $\triangle PBD$ 的内心．

同理，I 也是 $\triangle PCE$ 的内心.

因此，$\triangle PBD$ 的内心就是 $\triangle PCE$ 的内心.

⑪⑦ 设 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，D,E,F 为 $\triangle ABC$ 的外接圆上三点使得 $AD // BE // CF$，S,T,U 分别为 D,E,F 关于边 BC，CA，AB 的对称点. 求证：S,T,U,H 四点共圆.（冷岗松供题）

（2006 年中国国家队选拔赛试题）

证明 先证明下面的引理.

引理：设 O,H 分别为 $\triangle ABC$ 的外心和垂心，P 为 $\triangle ABC$ 的外接圆上任意一点，P 关于 BC 的中点的对称点为 Q，则 QH 的垂直平分线与直线 AP 关于 OH 的中点对称.

引理的证明：事实上，如图 145 所示，过 A 作 $\triangle ABC$ 的外接圆的直径 AA'，则 A' 与 $\triangle ABC$ 的垂心 H 也关于 BC 的中点对称，所以 $QH \mathrel{\underline{\parallel}} A'P$. 又 $A'P \perp AP$，因此，$QH \perp AP$. 设 D,N 分别为 AP，QH 的中点，则 $A'P = 2OD$，$QH = 2NH$，于是，$OD \mathrel{\underline{\parallel}} NH$. 而 $AP \perp OD$，故 AH 的垂直平分线与直线 AP 关于 OH 的中点对称.

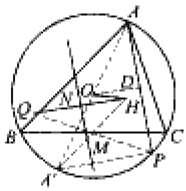


图 145

再证原题. 如图 146 所示，过点 D 作 BC 的平行线与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于另一个点 P. 由 $AD // BE // CF$ 易知 $PE // CA$，$PF // AB$. 因为 $PD // BC$，S 是点 D 关于 BC 的对称点，所以，点 P 关于 BC 的中点的对称点是 S. 设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，OH 的中点为 M，由引理，直线 AP 关于点 M 的对称直线是 HS 的垂直平分线；同理，直线 BP，CP 关于点 M 的对称直线分别是 HT 的垂直平分线和 HU 的垂直平分线. 而 AP，BP，CP 有公共点 P，因此 HS，HT，HU 这三条线段的三条垂直平分线交于一点. 故 S,T,U,H 四点共圆.

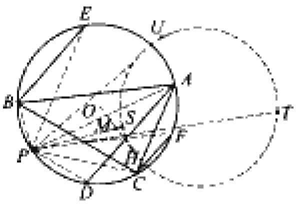


图 146

⑪⑧ 已知 $\triangle ABC$，点 X 是直线 BC 上的动点，且点 C 在点 B，X 之间. 又 $\triangle ABX$，$\triangle ACX$ 的内切圆有两个不同的交点 P,Q. 证明：PQ 经过一个不依赖于点 X 的定点.

（第 45 届国际数学奥林匹克预选题）

证明 先证明下面的引理.

引理：已知 L,K 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB，AC 的中点，$\triangle ABC$ 的内切圆分别与边 BC，CA 切于点 D,E. 则 KL 和 DE 的交点在 $\angle ABC$ 的角平分线上.

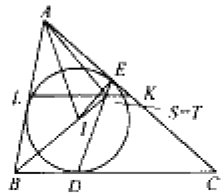


图 147

引理的证明：如图 147 所示，假设 $AB \neq BC$，否则结论显然成立. 设 KL 与 $\angle ABC$ 的角平分线交于点 S. 因为 $KL // BC$，所以

$$\angle LSB = \angle CBS = \angle LBS$$

于是，$LB = LS$.

又因为 $LA = LB$，所以，S 在以 AB 为直径的圆上，故有 $\angle ASB = 90°$.

设 DE 与 $\angle ABC$ 的角平分线交于点 T，则 $\triangle ABC$ 的内心 I 在点 B，T 之间. 又因为 $AB \neq BC$，则有 $T \neq E$，且 $\angle DEC = 90° - \frac{\angle C}{2}$，$\angle AIB = 90° + \frac{\angle C}{2}$.

如果 T 在线段 DE 的内部，有

$$\angle AIT + \angle AET = 180°$$

所以，A，I，T，E 四点共圆.

如果 I 和 E 在 AT 的同侧，有

$$\angle AIT = 90° - \frac{\angle C}{2} = \angle AET$$

也有 A，I，T，E 四点共圆.

因为 $\angle AEI = 90°$，所以，$\angle ATI = 90°$.

由于 $\angle ASB = \angle ATB$，则 S 和 T 重合，即 KL，DE 和 $\angle ABC$ 的角平分线交于一点.

下面证明原命题.

如图 148，设 $\triangle ABX$，$\triangle ACX$ 的内切圆与 BX 分别切于点 D，F，与 AX 分别切于点 E，G，则有 $DE \parallel FG$，且 DE，FG 均与 $\angle AXB$ 的角平分线垂直.

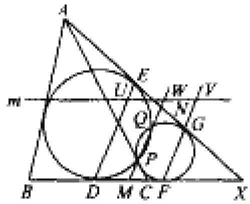


图 148

若 PQ 分别交 BX，AX 于点 M，N，则有

$$MD^2 = MP \cdot MQ = MF^2$$
$$NE^2 = NP \cdot NQ = NG^2$$

于是，有 $MD = MF$，$NE = NG$.

因此，PQ 平行于 DE 和 FG，且与它们是等距的.

由于 AB，AC 和 AX 的中点共线，设为 m，则直线 m 平行于 BC. 在 $\triangle ABX$ 中应用引理，知 DE 过直线 m 与 $\angle ABX$ 的角平分线的交点 U.

同理，FG 过直线 m 与 $\angle ACX$ 的角平分线的交点 V.

由于 PQ 平行于 DE 和 FG，且与它们是等距的，因此，PQ 过线段 UV 的中点 W.

又因为 U，V 不依赖于点 X，所以，W 也不依赖于点 X.

119 设圆 O_1 与圆 O_2 交于两点 A，B. 点 R 在圆 O_1 的弧 AB 上，点 T 在圆 O_2 的弧 AB 上(图 149). AR，BR 分别与圆 O_2 交于 C，D. AT，BT 交圆 O_1 于 Q，P. 若 PR 与 TD 交于 E，TC 与 RQ 交于 F. 求证：$AE \cdot BT \cdot BR = BF \cdot AT \cdot AR$.

(2006 年中国国家集训队测试题)

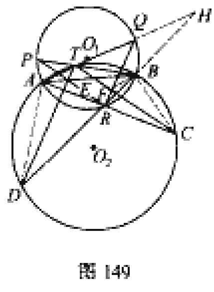


图 149

证明　延长 AQ，DB 交于 H. 联结 BC，AD，则有

$$HQ\cdot HA=HB\cdot HR$$

$$HT\cdot HA=HB\cdot HD$$

相除得
$$\frac{HQ}{HT}=\frac{HR}{HD}\Rightarrow QR\parallel TD$$

同理
$$PR\parallel TC$$

又
$$\angle RBC=\angle DTC=\angle RFC$$

所以 R，F，B，C 共圆.

令

$$\angle TCB=\angle FRB=\angle BAQ=\alpha$$

$$\angle TBA=\angle ADT=\angle ARP=\beta$$

由正弦定理，在 $\triangle ABT$ 中

$$\frac{AT}{BT}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

同理
$$\frac{AR}{BR}=\frac{\sin\angle ABR}{\sin\angle BAR}$$

从而
$$\frac{AT\cdot AR}{BT\cdot BR}=\frac{\sin\beta\cdot\sin\angle ABR}{\sin\alpha\cdot\sin\angle BAR}$$

又
$$\frac{AE}{TE}=\frac{\sin\angle ATE}{\sin\angle TAE}=\frac{\sin\angle AQR}{\sin\angle TPE}=$$
$$\frac{\sin\angle ABR}{\sin\angle BTC}=\frac{\sin\angle ABR}{\sin\angle BAR}$$

$$\frac{BF}{FP}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

相除得
$$\frac{AE\cdot FR}{BF\cdot TE}=\frac{\sin\angle ABR}{\sin\angle BAR}\cdot\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

又 $TERF$ 是平行四边形，所以

$$\frac{AE}{BF}=\frac{AT\cdot AR}{BT\cdot BR}$$

⑫⓪ 已知圆内接四边形 $ABCD$，直线 AD 和 BC 交于点 E，且点 C 在点 B，E 之间. 对角线 AC 和 BD 交于点 F. 设点 M 是 CD 的中点，点 N 是 $\triangle ABM$ 的外接圆上的不同于 M 的点，且满足 $\frac{AN}{BN}=\frac{AM}{BM}$. 证明：点 E，F，N 在一条直线上.

（第 45 届国际数学奥林匹克预选题）

证明　先证明在 $\triangle ABM$ 的外接圆上，有唯一的一点 $N\neq M$，使得 $\frac{AN}{BN}=\frac{AM}{BM}$.

若 $\lambda=\frac{AM}{BM}\neq 1$，则 M,N 是 $\triangle ABM$ 的外接圆与满足 $\frac{AX}{BX}=\lambda$ 的点 X 的轨迹的交点. 于是，点 X 的轨迹是一个与线段 AB 相交的圆，即线段 AB 关于定比 λ 的阿波罗尼斯圆. 因此，点 N 是存在的，且唯一.

若 $\frac{AM}{BM}=1$，易知点 N 也是唯一存在的，且 M,N 在 AB 的异侧.

设 $\triangle ABE,\triangle ABF$ 的外接圆分别与 EF 的第二个交点为 P,Q，于是，原命题等价于证明点 N 在直线 PQ 上. 下面证明点 N 就是线段 PQ 的中点 S.

设点 E,F,P,S,Q 是按照如图 150 的次序排列在一条直线 PQ 上的，且 PQ 与边 AB 相交.

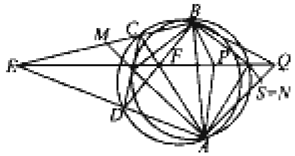


图 150

由于四边形 $APBE$，四边形 $AQBF$ 和四边形 $ABCD$ 均为圆内接四边形，所以

$$\angle APE=\angle ABE=\angle ABC=180^\circ-\angle ADC$$

$$\angle AQP=\angle AQF=\angle ABF=\angle ABD=\angle ACD$$

因此，$\triangle APQ\backsim\triangle ADC$.

由于 AS 和 AM 分别是这两个三角形对应边上的中线，所以，$\frac{AS}{AM}=\frac{PQ}{DC}$.

同理，$\triangle BPQ\backsim\triangle BCD$，有 $\frac{BS}{BM}=\frac{PQ}{CD}$. 因此

$$\frac{AS}{BS}=\frac{AM}{BM}$$

又因为 $\angle ASP=\angle AMD,\angle BSP=\angle BMC$，所以

$$\angle ASB=\angle ASP+\angle BSP=\angle AMD+\angle BMC=180^\circ-\angle AMB$$

因此，点 S 在 $\triangle ABM$ 的外接圆上，且 $S\neq M$.

由于 $N\neq M,S\neq M$，且 N,S 均在 $\triangle ABM$ 的外接圆上，同时，还满足

$$\frac{AN}{BN}=\frac{AM}{BM},\frac{AS}{BS}=\frac{AM}{BM}$$

由点 N 的唯一性，可得 $S=N$，即 N 为 PQ 的中点.

> ⑫① 设四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，且圆心 O 不在四边形的边上，对角线 AC 与 BD 交于点 P，$\triangle OAB,\triangle OBC,\triangle OCD,\triangle ODA$ 的外心分别为 O_1,O_2,O_3,O_4. 求证：三条直线 O_1O_3，O_2O_4 与 OP 共点.
>
> (2006 年中国国家集训队测试题)

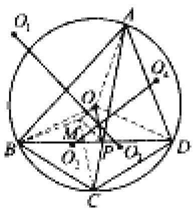


图 151

证明 设圆 (OAB) 与圆 (OCD) 交于 M，则

$$\angle BMC = 360° - \angle CMO - \angle OMB =$$
$$(180° - \angle CMO) + (180° - \angle OMB) =$$
$$\angle ODC + \angle BAO = (90° - \angle CBD) + (90° - \angle ACB) =$$
$$180° - \angle CBP - \angle PCB = \angle BPC$$

所以，M,B,C,P 四点共圆. 同理，M,P,D,A 四点共圆. 于是

$$\angle PMO = \angle CMO - \angle CMP =$$
$$180° - \angle ODC - \angle CBP =$$
$$180° - (90° - \angle CBP) - \angle CBP = 90°$$

这说明 $OM \perp MP$. 但 OM 为圆(OAB)与圆(OCD)的公共弦，所以 O_1O_3 垂直平分 OM，从而 O_1O_3 过 OP 的中点；同理，O_2O_4 也过 OP 的中点. 故三条直线 O_1O_3，O_2O_4 与 OP 共点.

⑫② 设圆 Γ 和直线 l 不相交，AB 是圆 Γ 的直径，且垂直于直线 l，点 B 比点 A 更靠近直线 l. 在圆 Γ 上任意取一点 $C(C \neq A, B)$，直线 AC 交直线 l 于点 D，直线 DE 与圆 Γ 切于点 E，且点 B，E 在 AC 的同一侧. 设 BE 交直线 l 于点 F，AF 交圆 Γ 于点 $G(G \neq A)$. 证明：点 G 关于 AB 的对称点在直线 CF 上.

（第 45 届国际数学奥林匹克预选题）

证明 如图 152，设 CF 交圆 Γ 于点 H. 因为直径 $AB \perp l$，所以，问题等价于证明

$$GH \parallel l$$

设 $AB \perp l$，垂足为点 X，则

$$\angle AXF = \angle AEF = 90°$$

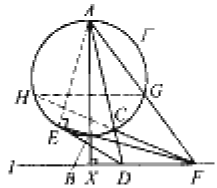


图 152

所以，A,F,X,E 四点共圆. 于是

$$\angle EFD = \angle EAB = \angle FED$$

从而，$DF = DE$.

又因为 $DF^2 = DE^2 = DC \cdot DA$，所以

$$\triangle DCF \backsim \triangle DFA$$

于是 $\qquad \angle AFD = \angle FCD = \angle ACH = \angle AGH$

故 $\qquad GH \parallel l$

⑫③ 设圆 ω 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，点 P 是 $\triangle ABC$ 的一个内点，射线 AP，BP，CP 分别交圆 ω 于点 A_1，B_1，C_1. 设 A_1，B_1，C_1 关于三边 BC，CA，AB 的中点的对称点为 A_2，B_2，C_2. 求证：$\triangle A_2B_2C_2$ 的外接圆通过 $\triangle ABC$ 的垂心.

（2006 年中国国家集训队测试题）

证明 我们用 O 和 H 分别表示 $\triangle ABC$ 的外心和垂心，用 D，E，F 分别表示边 BC，CA，AB 的中点. 在圆 ω 上选择三点 A_3，B_3，C_3 使得 AA_3，BB_3，CC_3 为圆 ω 的直径，如图 153 所示.

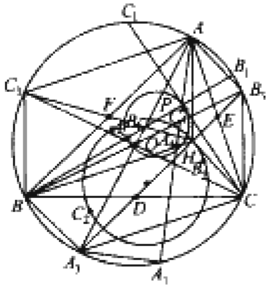


图 153

因为 $A_3B \perp AB$，$A_3B \parallel CH$，类似有 $A_3C \parallel BH$. 因此 A_3CHB 是平行四边形并且 D 是 HA_3 的中点. 同样的方法我们得到 E 和 F 分别是 HB_3 和 HC_3 的中点.

设点 O 在直线 PA，PB，PC 上的正交投影分别为 A_4，B_4，C_4，则 A_4，B_4，C_4 三点落在以 OP 为直径的圆的圆周上. 我们用 ω_2 表示这个圆. 由于 D 既是 HA_3 又是 A_1A_2 的中点，从而 $\overrightarrow{HA_2}=\overrightarrow{A_1A_3}$（即 $HA_2A_3A_1$ 是平行四边形）. 另一方面，由 $\angle AA_1A_3=90°$ 可知 $\triangle AA_1A_3$ 和 $\triangle AA_4O$ 相似. 因为 $\frac{AO}{AA_3}=\frac{1}{2}$，$\overrightarrow{A_1A_3}=2\overrightarrow{A_4O}$. 从而 $\overrightarrow{HA_2}=-2\overrightarrow{OA_4}$. 同样的方法我们可以得到 $\overrightarrow{HB_2}=-2\overrightarrow{OB_4}$，$\overrightarrow{HC_2}=-2\overrightarrow{OC_4}$. 这样就存在一个位似变换把点 (H, A_2, B_2, C_2) 映到 (O, A_4, B_4, C_4)，注意到 O，A_4，B_4，C_4 在圆 ω_2 上，从而 A_2，B_2，C_2，H 共圆.

124 已知圆心分别为 A，B 的两个圆交于点 C，D. 过点 A，B，C 的圆与圆 A，圆 B 分别交于点 E，F，且不包含点 C 的 $\overset{\frown}{EF}$ 在圆 A 和圆 B 的外部. 证明：CD 平分这段弧 $\overset{\frown}{EF}$.

（2005 年第 21 届意大利数学奥林匹克）

证明 如图 154，因为 $\angle CED=\frac{1}{2}\angle CAD=\angle CAB$，$\angle CAB=\angle CEB$，所以，$\angle CED=\angle CEB$，即 E，D，B 三点共线.

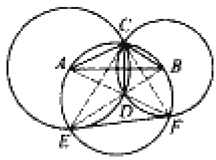


图 154

因为 $\overset{\frown}{CB}=\overset{\frown}{BF}$，所以，$\angle CEB=\angle BEF$，即 D 在 $\angle CEF$ 的角平分线上.

同理，D 在 $\angle CFE$ 的角平分线上.

因此，D 是 $\triangle CEF$ 的内心.

从而，CD 是 $\angle ECF$ 的角平分线，即平分 $\overset{\frown}{EF}$.

125 如图 155，设 $ABCD$ 是一个梯形并且 $AB \parallel CD$，$ABCD$ 内部有两个圆 w_1 和 w_2 满足：圆 w_1 与三边 DA，AB，BC 相切，圆 w_2 与三边 BC，CD，DA 相切. 令 l_1 是过点 A 的异于直线 AD 的圆 w_2 的另一条切线，l_2 是过点 C 的异于直线 CB 的圆 w_1 的另一条切线. 证明：$l_1 \parallel l_2$.

（2006 年中国国家集训队测试题）

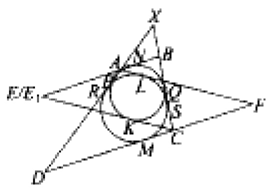


图 155

证明 不失一般性,设 $AB < CD$.令射线 DA 和射线 CB 相交于点 X.l_1 与 DC,l_2 与 AB 分别相交于点 F,E.圆 ω_1 与三边 AB,DA,BC 分别相切于点 N,P,Q;圆 ω_2 与三边 CD,AD,BC 分别相切于点 M,R,S.

由切线的性质可得

$$\begin{aligned}CE - AE &= CK + KE - AE = CQ + EN - AE = \\ &CQ + AN = CQ + AP = \\ &CQ + QX + AP - QX = \\ &CX + AP - XP = \\ &CX - XA\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}AF - CF &= AL + LF - CF = AR + FM - CF = \\ &AR + MC = AR + SC = \\ &AR + SC + SX - SX = \\ &AR + CX - SX = \\ &AR + CX - RX = \\ &CX - XA\end{aligned}$$

从而

$$CE - AE = AF - CF$$

或者

$$CE - AF = AE - CF$$

在直线 AB 上取一点 E_1 使得 E_1AFC 是平行四边形.则 $AE_1 = CF$,$AF = CE_1$.因此

$$AE - AE_1 = AE - CF = CE - AF = CE - CE_1$$

即 $EE_1 = |CE - CE_1|$.由三角不等式知 $E = E_1$,从而 $l_1 \parallel l_2$.

⑫⑥ 已知梯形 $ABCD$,且 $AD \parallel BC$.设圆 O_1,圆 O_2,圆 O_3,圆 O_4 分别是以 AB,BC,CD,DA 为直径的圆.证明:当且仅当梯形 $ABCD$ 为平行四边形时,存在一个圆心 O 在梯形$ABCD$内的大圆与所有 4 个圆圆 O_1,圆 O_2,圆 O_3,圆 O_4 都内切.

(2005 年第 18 届韩国数学奥林匹克)

证明 显然 O_1,O_2,O_3,O_4 分别是 AB,BC,CD,DA 的中点.易知,题目所要求的圆存在当且仅当点 O 满足下面的条件,即

$$OO_1 + O_1A = OO_2 + O_2B = OO_3 + O_3C = OO_4 + O_4D \quad ①$$

如果梯形 $ABCD$ 是平行四边形,易知平行四边形的中心,即 AC 与 BD 的交点就是满足式 ① 的点 O.

假设梯形 $ABCD$ 不是平行四边形.设 P,Q 是O_1O_3上的点,使得

$$O_4P \parallel AB, O_4Q \parallel CD$$

不失一般性，设 $AD < BC$，$AB \leqslant CD$.

(1) 假设 O 位于四边形 O_4PO_3D 内(包括边界)，则有

$$OO_3 + O_3A = OO_4 + O_4A \quad ②$$

设 OO_1 与 O_4P 相交于 H，则有

$$OO_1 = OH + HO_1, O_1A = PO_4 = PH + HO_4$$

所以，式 ② 左边变为

$$OO_1 + O_1A = OH + HO_1 + PH + HO_4$$

易得 $OH + HO_4 > OO_4$，$HO_1 + PH \geqslant O_4A$

故 $OO_1 + O_1A = OH + HO_4 + HO_1 + PH > OO_4 + O_4A$

与式 ② 矛盾.

因此，O 不在四边形 O_4PO_3D 内(包括边界).

同理可得，O 不在四边形 AO_1QO_4，O_1BO_2P，QO_2CO_3 内(包括边界).

(2) 假设 O 位于 $\triangle PO_2Q$ 内，则有

$$OO_1 + OO_3 > O_1O_3 = O_4D + O_2B$$

$$O_3C + O_1A = O_4Q + QO_2 > OO_2 + OO_4$$

以上两个不等式两边分别求和得

$$OO_1 + O_1A + OO_3 + O_3C > OO_2 + O_2B + OO_4 + O_4D$$

与式 ① 矛盾.

从而证明了，如果梯形 $ABCD$ 不是平行四边形，则在梯形 $ABCD$ 内没有满足式 ① 的点 O.

> ⑫⑦ 如图 156，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A \geqslant 60°$，$\triangle ABC$ 的内切圆 I 分别切边 AB，AC 于点 D，E，直线 DE 分别与直线 BI，CI 相交于点 F，G，证明：$FG = \frac{1}{2}BC$.（张鹏程供题）
>
> （2006 年中国东南地区数学奥林匹克）

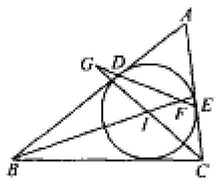


图 156

证法 1 分别联结 CF，BG，ID，IE，AI，则 A，D，I，E 四点共圆. 所以 $\angle IDE = \frac{1}{2}\angle A$，从而

$$\angle BDF = 90° + \frac{1}{2}\angle A$$

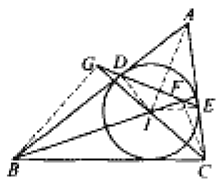


图 157

又 $\angle BIC = 180° - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 90° + \frac{1}{2}\angle A$

所以 $\angle BDF = \angle BIC$

又 $\angle DBF = \angle CBI$，得 $\triangle FDB \backsim \triangle CIB$. 所以

$$\frac{FB}{CB}=\frac{DB}{IB}$$

又由 $\angle DBI=\angle FBC$，得 $\triangle IDB\backsim\triangle CFB$，所以 $CF\perp BF$，从而 $\angle FCG=\frac{1}{2}\angle A=30^\circ$.

同理 $BG\perp GC$，所以 B,C,F,G 四点共圆，由此

$$\frac{FG}{\sin\angle FCG}=BC$$

所以
$$FG=\frac{1}{2}BC$$

证法 2 因为

$$\angle BIG=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$$

又因为 $\angle BDG=\angle ADE=\frac{180^\circ-\angle A}{2}=\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)$

所以 B,D,I,G 四点共圆，因此

$$\angle BGC=\angle BDI=90^\circ$$

同理 $\angle CFB=90^\circ$，所以 B,C,F,G 四点共圆．又

$$\angle FCG=90^\circ-\angle FBC-\angle BCI=$$
$$90^\circ-\frac{1}{2}(\angle B+\angle C)=30^\circ$$

所以
$$FG=BC\cdot\sin\angle FCG=\frac{1}{2}BC$$

⑫⑧ 在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle A=90^\circ$，$\angle B>\angle C$，O 是 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心，l_A，l_B 是圆 O 的两条切线，切点分别为 A，B．设

$$\{S\}=BC\cap l_A,\{D\}=AC\cap l_B$$
$$\{E\}=AB\cap DS,\{T\}=CE\cap l_A$$

又设 P 是 l_A 上的点，且使得 $EP\perp l_A$，$Q(Q\neq C)$ 是 CP 与圆 O 的交点，R 是 QT 与圆 O 的交点．令 $\{U\}=BR\cap l_A$．证明：

$$\frac{SU\cdot SP}{TU\cdot TP}=\frac{SA^2}{TA^2}$$

（2005 年第 18 届韩国数学奥林匹克）

证明 设 BA 的延长线与圆 O（过点 C）的切线交于点 E'，由帕斯卡定理，S,D,E' 三点共线，从而，$E'=E$．因此，点 R,Q 的位置如图 158 所示．

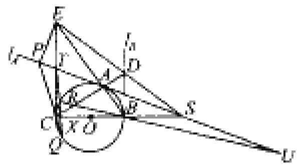


图 158

由切割线定理得

$$TA^2=TR\cdot TQ,SA^2=SB\cdot SC$$

故

$$\frac{SA^2}{TA^2}=\frac{SB\cdot SC}{TR\cdot TQ} \quad ①$$

设 $X=TQ\cap CB$. 由梅涅劳斯定理得

$$\frac{XR}{RT}\cdot\frac{TU}{US}\cdot\frac{SB}{BX}=1 \quad ②$$

$$\frac{XQ}{QT}\cdot\frac{TP}{PS}\cdot\frac{SC}{CX}=1 \quad ③$$

由相交弦定理得

$$XR\cdot XQ=XB\cdot XC \quad ④$$

由式①,②,③,④得

$$\frac{SU}{TU}\cdot\frac{SP}{TP}=\frac{XR}{RT}\cdot\frac{SB}{BX}\cdot\frac{XQ}{QT}\cdot\frac{SC}{CX}=$$

$$\frac{SB\cdot SC}{TR\cdot TQ}\cdot\frac{XR\cdot XQ}{XB\cdot XC}=\frac{SA^2}{TA^2}$$

(129) 如图159,圆 O_1 与圆 O_2 交于 A,B 两点. 过点 O_1 的直线 DC 交圆 O_1 于 D 且切圆 O_2 于 C, CA 切圆 O_1 于 A, 圆 O_1 的弦 AE 与直线 DC 垂直. 过 A 作 AF 垂直于 DE, F 为垂直. 求证: BD 平分线段 AF.(边红平供题)

(2005年中国西部数学奥林匹克)

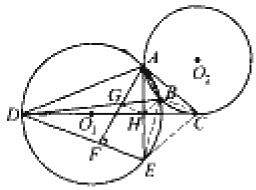


图159

证明　设 AE 交 DC 于 H, AF 交 BD 于 G, 联结 AB,BC,BH,BE,CE,GH, 由对称性知 CE 边也是圆 O_1 的切线, H 为 AE 的中点. 因为

$$\angle HCB=\angle BAC,\angle BAC=\angle BEH$$

所以

$$\angle HCB=\angle HEB$$

H,B,C,E 四点共圆, 于是

$$\angle BHC=\angle BEC$$

又

$$\angle BEC=\angle BDE$$

所以

$$\angle BHC=\angle BDE \quad ①$$

而

$$AF\perp DE\Rightarrow\angle AGB=\frac{\pi}{2}-\angle BDE \quad ②$$

$$AE\perp DC\Rightarrow\angle AHB=\frac{\pi}{2}-\angle BHC \quad ③$$

由①②③得

$$\angle AGB=\angle AHB$$

所以 A,G,H,B 四点共圆, 进而

$$\angle AHG = \angle ABG = \angle AED$$

于是 $GH // DE$，而 H 为 AE 的中点，故 G 为 AF 的中点.

130 设 $\triangle ABC$ 中 $\angle A$ 内的旁切圆与 BC，CA，AB 分别切于点 A_1，B_1，C_1，$\angle B$ 内的旁切圆与 BC，CA，AB 分别切于点 A_2，B_2，C_2，$\angle C$ 内的旁切圆与 BC，CA，AB 分别切于点 A_3，B_3，C_3. 求 $\triangle A_1B_1C_1$，$\triangle A_2B_2C_2$，$\triangle A_3B_3C_3$ 的周长之和与 $\triangle ABC$ 的外接圆半径之比的最大值.

（第 12 届土耳其国家数学奥林匹克）

解 易知

$$A_1C_1 = 2(p-c)\cos\frac{B}{2}, A_1B_1 = 2(p-b)\cos\frac{C}{2}$$

$$B_1C_1 = 2p\sin\frac{A}{2}$$

其中 p 为 $\triangle ABC$ 半周长，则

$$T = \sum_{i=1}^{3}(A_iC_i + A_iB_i + B_iC_i) =$$

$$\sum\left[2(p-c)\cos\frac{B}{2} + 2(p-b)\cos\frac{C}{2} + 2p\sin\frac{A}{2}\right] =$$

$$\sum\left[(a+b-c)\cos\frac{B}{2} + (a+c-b)\cos\frac{C}{2}\right] + 2p\sum\sin\frac{A}{2} =$$

$$2\sum a\cos\frac{A}{2} + 2p\sum\sin\frac{A}{2} =$$

$$4R\sum\sin A\cdot\cos\frac{A}{2} + 2R\sum\sin A\cdot\sum\sin\frac{A}{2}$$

因为 $(\sin A)'' = (\cos A)' = -\sin A < 0$，则

$$\sum\sin A \leqslant 3\sin\frac{A+B+C}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

同理
$$\sum\sin\frac{A}{2} \leqslant \frac{3}{2}$$

故
$$2\sum\sin A\cdot\sum\sin\frac{A}{2} \leqslant \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

又
$$2\sin A\cdot\cos\frac{A}{2} = \sin\frac{3A}{2} + \sin\frac{A}{2} \leqslant 1 + \sin\frac{A}{2}$$

则
$$4\sum\sin A\cdot\cos\frac{A}{2} \leqslant 2\sum\left(1 + \sin\frac{A}{2}\right) \leqslant$$

$$2\left(3 + \frac{3}{2}\right) = 9$$

所以
$$\frac{T}{R} \leqslant 9 + \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时，上式等号成立.

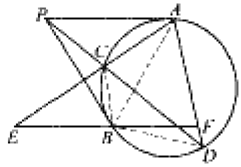


图 160

⑬① 如图160,过圆外一点 P 作圆的两条切线 PA,PB,A,B 为切点,再过点 P 作圆的一条割线分别交圆于 C、D 两点,过切点 B 作 PA 的平行线分别交直线 AC,AD 于 E,F.求证:$BE = BF$.(冷岗松供题)

(2005 年第五届中国西部数学奥林匹克)

证明 联结 BC,BA,BD,则 $\angle ABC = \angle PAC = \angle E$,所以,$\triangle ABC \backsim \triangle AEB$,从而 $\dfrac{BE}{BC} = \dfrac{AB}{AC}$,即

$$BE = \frac{AB \cdot BC}{AC} \quad ①$$

又 $\angle ABF = \angle PAB = \angle ADB$,所以 $\triangle ABF \backsim \triangle ADB$,从而 $\dfrac{BF}{BD} = \dfrac{AB}{AD}$,即

$$BF = \frac{AB \cdot BD}{AD} \quad ②$$

另一方面,因为 $\triangle PBC \backsim \triangle PDB$,$\triangle PCA \backsim \triangle PAD$,所以

$$\frac{BC}{BD} = \frac{PC}{PB},\frac{AC}{AD} = \frac{PC}{PA}$$

而 $PA = PB$,所以

$$\frac{BC}{BD} = \frac{AC}{AD} \quad ③$$

于是 $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{BD}{AD}$.故由①②③三式即知 $BE = BF$.

⑬② 已知圆 ω 是等边 $\triangle ABC$ 的外接圆,设圆 ω 与圆 ω_1 外切且切点异于点 A,B,C,点 A_1,B_1,C_1 在圆 ω_1 上,且使得 AA_1,BB_1,CC_1 与圆 ω_1 相切.证明:线段 AA_1,BB_1,CC_1 中的一线段的长度等于另两线段长度之和.

(2004 年泰国数学奥林匹克)

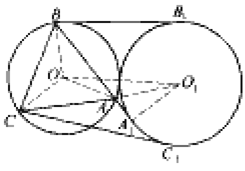


图 161

解法 1 如图161,设 r,r_1 分别是圆 ω,圆 ω_1 的半径.不失一般性,设圆 ω 和圆 ω_1 的切点位于 AB 间靠近 A 的一边.

记 O,O_1 分别是圆 ω,圆 ω_1 的圆心.

设 $\angle O_1OA = \alpha$.则

$$\angle O_1OB = 120° - \alpha,\angle O_1OC = 120° + \alpha$$

由余弦定理得

$AA_1^2 = AO_1^2 - r_1^2 = r^2 + (r + r_1)^2 - 2r(r + r_1)\cos\alpha - r_1^2 =$

$$2r(r+r_1)(1-\cos\alpha)=4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot r(r+r_1)$$

注意到 $0<\alpha<120°$，所以

$$AA_1=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{r(r+r_1)}$$

同理
$$BB_1=2\sin(60°-\frac{\alpha}{2})\cdot\sqrt{r(r+r_1)}$$
$$CC_1=2\sin\left(60°+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sqrt{r(r+r_1)}$$

因此

$$AA_1+BB_1=2\sqrt{r(r+r_1)}\left[\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\left(60°-\frac{\alpha}{2}\right)\right]=$$
$$2\sqrt{r(r+r_1)}\sin\left(60°+\frac{\alpha}{2}\right)=CC_1$$

解法2 如图162，假设圆 ω 和圆 ω_1 相切于点 X，且 X 位于劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上．设直线 AX,BX,CX 分别交圆 ω_1 于点 A',B',C'．

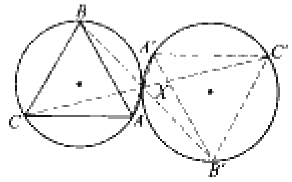


图 162

注意到，以 X 为中心，$-\frac{r_1}{r}$ 为位似比的位似变换将 $\triangle ABC$ 映射到 $\triangle A'B'C'$，所以，$\triangle A'B'C'$ 是等边三角形．

由托勒密定理有

$$AC\cdot BX+AX\cdot BC=AB\cdot CX$$

因为 $\triangle ABC$ 是等边三角形，所以

$$AX+BX=CX$$

令 $m=\frac{r_1+r}{r}$．根据相似形的性质有

$$AA'=m\cdot AX,BB'=m\cdot BX,CC'=m\cdot CX$$

于是，$AX+BX=CX$ 意味着

$$\sqrt{AX\cdot(m\cdot AX)}+\sqrt{BX\cdot(m\cdot BX)}=\sqrt{CX\cdot(m\cdot CX)}$$

即
$$\sqrt{AX\cdot AA'}+\sqrt{BX\cdot BB'}=\sqrt{CX\cdot CC'}$$

由点 A,B,C 关于圆 ω_1 的幂，得

$$AA_1+BB_1=CC_1$$

(133) 如图163，设点 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圆上，直线 CP 和 AB 相交于点 E，直线 BP 和 AC 相交于点 F，边 AC 的垂直平分线交边 AB 于点 J，边 AB 的垂直平分线交边 AC 于点 K．求证：

$$\frac{CE^2}{BF^2}=\frac{AJ\cdot JE}{AK\cdot KF}$$

（叶中豪供题）

（2005年第4届中国女子数学奥林匹克）

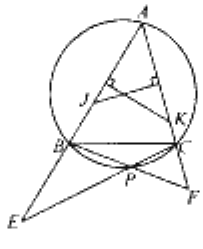


图 163

证明 如图 164，联结 BK，CJ.

$$\angle E = \angle ABP - \angle BPE$$

而由 A，B，P，C 四点共圆，知 $\angle BPE = \angle A$，故

$$\angle E = \angle ABP - \angle A$$

又由 $KA = KB$，知 $\angle A = \angle ABK$，故

$$\angle E = \angle ABP - \angle ABK = \angle KBF \quad ①$$

同理

$$\angle F = \angle JCE \quad ②$$

由 ①，② 得 $\triangle JEC \backsim \triangle KBF$

由此

$$\frac{CE}{BF} = \frac{JE}{KB} = \frac{JE}{AK} \quad ③$$

$$\frac{CE}{BF} = \frac{JC}{KF} = \frac{AJ}{KF} \quad ④$$

将 ③，④ 两式的左端和右端分别相乘即得结论.

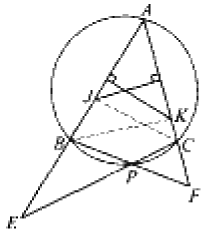


图 164

> **134** 已知圆 O_1 在圆 O_2 的内部，且圆 O_1 与圆 O_2 相切于点 A，过 A 作直线交圆 O_1 于 B，交圆 O_2 于 C，过 B 作圆 O_1 的切线，与圆 O_2 交于点 D 和 E，过点 C 作圆 O_1 的两条切线，切点分别为 F，G. 证明：D，E，F，G 四点共圆.
>
> （2005 年第 19 届北欧数学竞赛）

证明 如图 165，作圆 O_1，圆 O_2 的公切线 AH 与 DE 交于点 H，有

$$\angle HAB = \angle HBA$$

在圆 O_2 中

$$\angle HAB = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}^{\circ} \quad ①$$

$$\angle HBA = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}^{\circ} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{CE}^{\circ} \quad ②$$

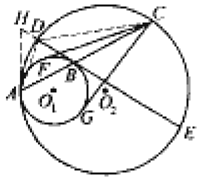


图 165

综合式 ①，② 得 $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{CE}$，即 $CD = CE$.

在圆 O_2 中，$\angle DAC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{DC}^{\circ} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CE}^{\circ} = \angle CDE$，又 $\angle DCB = \angle ACD$，所以，$\triangle CDB \backsim \triangle CAD$.

故 $\dfrac{CD}{CB} = \dfrac{CA}{CD}$，即 $CD^2 = CA \cdot CB$.

因为 $CF^2 = CA \cdot CB$（CF 为圆 O_1 的切线），所以

$$CF^2 = CD^2, CF = CD$$

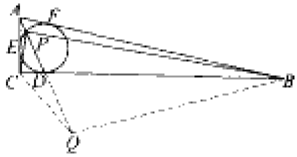
又 $$CD = CE, CF = CG$$

故 $$CD = CF = CG = CE$$

所以，D，F，G，E 四点共圆，C 为圆心．

135 在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\triangle ACB$ 的内切圆 O 分别与边 BC，CA，AB 相切于点 D，E，F，联结 AD，与内切圆 O 相交于点 P，联结 BP，CP，若 $\angle BPC=90^\circ$，求证：$AE+AP=PD$．（熊斌供题）

（2006 年中国数学奥林匹克）


图 166

证明 设 $AE=AF=x$，$BD=BF=y$，$CD=CE=z$，$AP=m$，$PD=n$．因为

$$\angle ACP+\angle PCB=90^\circ=\angle PBC+\angle PCB$$

所以
$$\angle ACP=\angle PBC$$

延长 AD 至点 Q，使得 $\angle AQC=\angle ACP=\angle PBC$，联结 BQ，CQ，则 P，B，Q，C 四点共圆，令 $DQ=l$，则由相交弦定理和切割线定理可得

$$yz=nl \qquad ①$$

$$x^2=m(m+n) \qquad ②$$

因为 $\triangle ACP\backsim\triangle AQC$，所以 $\dfrac{AC}{AQ}=\dfrac{AP}{AC}$，故

$$(x+z)^2=m(m+n+l) \qquad ③$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle ACD$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle ACB$ 中，由勾股定理得

$$(x+z)^2+z^2=(m+n)^2 \qquad ④$$

$$(y+z)^2+(z+x)^2=(x+y)^2 \qquad ⑤$$

③ − ②，得

$$z^2+2zx=ml \qquad ⑥$$

① ÷ ⑥ 得
$$\frac{yz}{z^2+2zx}=\frac{n}{m}$$

所以

$$1+\frac{yz}{z^2+2zx}=\frac{m+n}{m} \qquad ⑦$$

② × ⑦，结合 ④，得

$$x^2+\frac{x^2yz}{z^2+2zx}=(m+n)^2=(x+z)^2+z^2$$

整理得

$$\frac{x^2y}{z+2x}=2z(x+z) \qquad ⑧$$

又式 ⑤ 可写为

$$x+z=\frac{2xy}{y+z} \qquad ⑨$$

由 ⑧，⑨ 得

$$\frac{x}{z+2x}=\frac{4z}{y+z} \qquad ⑩$$

又式⑤还可写为

$$y+z=\frac{2xz}{x-z} \qquad ⑪$$

把上式代入⑩,消去 $y+z$,得

$$3x^2-2xz-2z^2=0$$

解得
$$x=\frac{\sqrt{7}+1}{3}z$$

代入④,得
$$m+n=\frac{2(\sqrt{7}+1)}{3}z$$

结合②,得
$$m=\frac{x^2}{m+n}=\frac{\sqrt{7}+1}{6}z$$

从而
$$n=\frac{\sqrt{7}+1}{2}z$$

所以,$x+m=n$,即 $AE+AP=PD$.

> ⑬⑥ 在 $\triangle ABC$ 中,$AB<BC$,点 I 为其内心,M 是边 AC 的中点,N 是外接圆上的 $\overset{\frown}{ABC}$ 的中点.证明:$\angle IMA=\angle INB$.
>
> (2005 年第 31 届俄罗斯数学奥林匹克)

证明 如图 167,过点 M 作外接圆的直径 NP.则

$$\angle NBP=\angle NAP=90^\circ$$

于是,P 是 $\overset{\frown}{AC}$ 的中点.

故 $\angle ABP=\angle CBP$,即 BP 是 $\angle ABC$ 的平分线.

因此,I 位于 BP 上.

由于 $\angle AIP$ 是 $\triangle AIB$ 的外角,所以

$$\angle AIP=\angle BAI+\angle ABI=\frac{\angle BAC}{2}+\frac{\angle ABC}{2}=$$
$$\angle IAC+\angle CBP=\angle IAC+\angle CAP=\angle IAP$$

由此可得 $AP=IP$.

由于 AM 是 $Rt\triangle NAP$ 的高,所以

$$\frac{AP}{MP}=\frac{NP}{AP}$$

从而
$$\frac{IP}{MP}=\frac{NP}{IP}$$

故
$$\triangle PMI\backsim\triangle PIN$$

因而
$$\angle PMI=\angle PIN$$

显然
$$\angle IMA=\angle PMI-90^\circ$$

又 $\triangle BNI$ 为直角三角形,所以

$$\angle INB=\angle PIN-\angle IBN=\angle PIN-90^\circ=\angle IMA$$

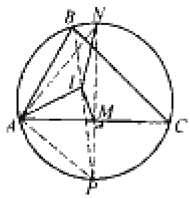


图 167

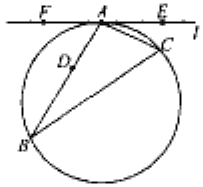


图 168

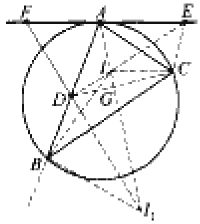


图 169

(137) 如图 168，$\triangle ABC$ 中，设 $AB > AC$，过 A 作 $\triangle ABC$ 的外接圆的切线 l. 又以 A 为圆心，AC 为半径作圆分别交线段 AB 于 D，交直线 l 于 E，F.

证明：直线 DE，DF 分别通过 $\triangle ABC$ 的内心与一个旁心.（注：与三角形的一边及另两边的延长线均相切的圆称为三角形的旁切圆，旁切圆的圆心称为旁心.）

（2005 年全国高中数学联赛加试题）

证明　(1) 先证 DE 过 $\triangle ABC$ 的内心.

如图 169，联结 DE，DC，作 $\angle BAC$ 的平分线，分别交 DE 于 I，DC 于 G，联结 IC，则由 $AD = AC$，得 $AG \perp DC$，$ID = IC$.

又 D，C，E 在圆 A 上，所以 $\angle IAC = \frac{1}{2}\angle DAC = \angle IEC$，从而 A，I，C，E 四点共圆，所以 $\angle CIE = \angle CAE = \angle ABC$，而 $\angle CIE = 2\angle ICD$，于是

$$\angle ICG = \frac{1}{2}\angle ABC$$

所以 $$\angle AIC = \angle IGC + \angle ICG = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle ABC$$

$$\angle ACI = \frac{1}{2}\angle ACB$$

故 I 为 $\triangle ABC$ 的内心.

(2) 再证 DF 过 $\triangle ABC$ 的一个旁心.

联结 FD 并延长交 $\angle ABC$ 的外角平分线于 I_1，联结 II_1，BI_1，BI，由(1)知，I 为内心，所以 $\angle IBI_1 = 90^\circ = \angle EDI_1$，于是，$D$，$B$，$I_1$，$I$ 四点共圆.

因为

$$\angle BII_1 = \angle BDI_1 = 90^\circ - \angle ADI = \left(\frac{1}{2}\angle BAC + \angle ADG\right) - \angle ADI = \frac{1}{2}\angle BAC + \angle IDG$$

所以 A，I，I_1 共线.

因此，I_1 是 $\triangle ABC$ 的 BC 边外的旁心.

⑬⑧ 等腰 $\triangle ABC$，$AB=AC$，P 在边 BC 的延长线上，X 和 Y 分别是直线 AB 和 AC 上的点．$PX\parallel AC$，$PY\parallel AB$，T 是 $\triangle ABC$ 外接圆上弧 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点．证明：$PT\perp XY$．

（2004～2005 年第 22 届伊朗数学奥林匹克）

证明　如图 170，设 M 和 N 分别是 T 在 PX 和 PY 上的正交投影，可以得到

$$\frac{PY}{AB}=\frac{PC}{BC}$$

$$PN=PB\cdot\sin\frac{A}{2}$$

所以
$$PN\cdot PY=PB\cdot PC\cdot\frac{AB}{BC}\cdot\sin\frac{A}{2}$$

同理
$$PM\cdot PX=PB\cdot PC\cdot\frac{AC}{BC}\cdot\sin\frac{A}{2}$$

由于 $AB=AC$，所以

$$PX\cdot PM=PN\cdot PY$$

因为 M 和 N 分别在以 TX 和 TY 为直径的圆上，故点 P 在分别以 TX 和 TY 为直径的两圆的根轴上．

设 K 是分别以 TX 和 TY 为直径的两圆的另外一个交点，于是，T,K,P 三点共线．

又 $\overset{\frown}{YKT}=\overset{\frown}{XKT}=\frac{\pi}{2}$，所以，$PT\perp XY$．

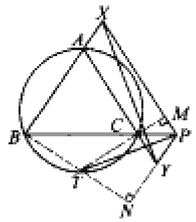


图 170

⑬⑨ $\triangle ABC$ 的外接圆的圆心为 O，A' 是边 BC 的中点，AA' 与外接圆交于点 A''，$A'Q_a\perp AO$，点 Q_a 在 AO 上，过点 A'' 的外接圆的切线与 $A'Q_a$ 相交于点 P_a．用同样的方式，可以构造点 P_b 和 P_c．证明：P_a,P_b,P_c 三点共线．

（2004～2005 年第 22 届伊朗数学奥林匹克）

证明　可以证明它们都在圆 O 与九点圆的根轴上．

如图 171，把 $\triangle ABC$ 位似变换到 $\triangle A'B'C'$，$\triangle ABC$ 的重心为位似中心，位似比为 $-\frac{1}{2}$．

在这种变换下，AO 变成了 $A'N$，其中 N 是九点圆的圆心．所以

$$A'N\parallel AO,A'P_a\perp A'N$$

故 $A'P_a$ 是九点圆的切线．

易知 $\angle OAB+\angle C=90°$，则 $\angle BAA'+\angle A'AO+\angle C=90°$（不妨设 $AB\leqslant AC$）．又

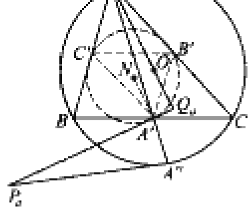


图 171

$$\angle P_aA''A' = \angle BAA' + \angle C$$

$$\angle P_aA'A'' = 90^\circ - \angle A'AO$$

$$\angle P_aA''A' = \angle P_aA'A''$$

所以
$$A'P_a = A''P_a$$

所以，P_a 在圆 O 与九点圆的根轴上.

同理，P_b，P_c 也在圆 O 与九点圆的根轴上.

140 如图 172，在锐角 $\triangle ABC$ 中，AD，BE，CF 为高线，H 为垂心，过 A，H 的圆 O 与 AB，AC 分别交于 Q，P（均不同于 A）. 若 $\triangle OPQ$ 的外接圆与 BC 切于 R，求证：$\dfrac{CR}{BR} = \dfrac{ED}{FD}$.

（2006 年中国国家集训队测试题）

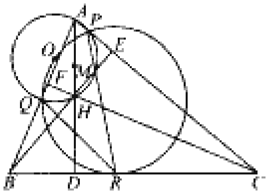


图 172

证明 由 A，P，H，Q 共圆，知

$$\angle HPE = \angle HQF$$

故
$$\triangle HPE \backsim \triangle HQF$$

所以
$$\frac{PE}{EH} = \frac{QF}{FH} \Rightarrow \frac{PE}{CE} = \frac{QF}{BF} \Rightarrow \frac{PC}{EC} + \frac{QB}{FB} = 2$$

取 PC 的中垂线交 BC 于 R_1，则

$$CR_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{PC}{EC} \cdot BC$$

取 QB 中垂线交 BC 于 R_2，则

$$BR_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{QB}{FB} \cdot BC$$

所以
$$CR_1 + BR_2 = BC$$

故 R_1，R_2 重合，记为 R_0. 这样

$$PR_0 = R_0C$$

$$QR_0 = R_0B \Rightarrow \angle PR_0Q = \pi - (\pi - 2B) - (\pi - 2C) = \pi - \angle POQ$$

故 P，R_0，Q，O 四点共圆.

这样 $R_0 \in BC \cap$ 圆 POQ，而直线 BC 切圆 POQ 于 R，所以 $R_0 = R$，故 $PR = RC$，$QR = RB$.

取 AH 的中点 M，则 $\angle HOM = \frac{1}{2}\angle HOA = \angle HQF$，所以，$\triangle HOM \backsim \triangle HQF \backsim \triangle HPE$，所以 $\triangle QOP$ 与 $\triangle FME$ 是关于 H 为中心的旋转位似，$\triangle QOP$ 的外接圆与 $\triangle FME$ 外接圆是关于 H 为中心的旋转位似. 而 D 在 $\triangle FME$ 的外接圆上（即为 $\triangle ABC$ 的九点圆），则其旋转位似点 D_1 满足 $\angle HDD_1 = 90^\circ$，故 D_1 在 BC 上. 又 D_1 在 $\triangle QOP$ 的外接圆上，所以 $D_1 = R$，这样我们有四边形 $DFME \backsim$ 四边形 $RQOE$，故

$$\frac{ED}{FD}=\frac{RP}{RQ}=\frac{CR}{BR}$$

141 已知非等腰锐角 $\triangle ABC$，AA_1，BB_1 是它的两条高，又线段 A_1B_1 与平行于 AB 的中位线相交于点 C'. 证明：经过 $\triangle ABC$ 的外心和垂心的直线与直线 CC' 垂直.

（第 31 届俄罗斯数学奥林匹克）

证明　先给出下面的一些概念：

值 OX^2-R^2 称为点 X 关于以 O 为圆心，以 R 为半径的圆的幂.

关于两个圆有相同的幂的点的轨迹称为这两个圆的根轴. 根轴一定是直线.

两个相交的圆的根轴就是经过它们的两个交点的直线.

如图 173，在 $\triangle ABC$ 中，分别将边 BC，CA 的中点记作 A_0，B_0，将三角形的垂心记作 H，外心记作 O.

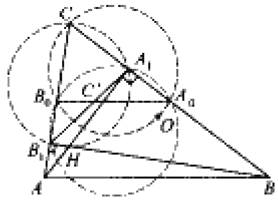


图 173

因为点 A，B，A_1，B_1 位于同一圆周上（AB 为其直径），所以

$$\angle CB_1A_1=\angle CBA=\angle CA_0B_0$$

故点 A_0，B_0，A_1，B_1 位于同一圆周 ω_1 上.

将以 CH 为直径的圆周记作 ω_2，将以 CO 为直径的圆周记作 ω_3. 易知，点 A_1，B_1 位于圆周 ω_2 上，而点 A_0，B_0 位于圆周 ω_3 上.

因此，点 C' 关于圆 ω_1 和圆 ω_2 有相同的幂，关于圆 ω_1 和圆 ω_3 也有相同的幂.

从而，点 C' 关于圆 ω_2 和圆 ω_3 有相同的幂，即位于它们的根轴之上.

所以，直线 CC' 就是圆 ω_2 和圆 ω_3 的根轴.

故 CC' 垂直于这两个圆的圆心连线.

又圆 ω_2 和圆 ω_3 的圆心分别为线段 CH 和 CO 的中点，它们的连线平行于直线 OH，则 $OH\perp CC'$.

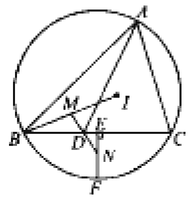


图 174

142 如图 174，I 是 $\triangle ABC$ 的内心，M 是 BI 的中点，E 是 BC 的中点，F 是 $\triangle ABC$ 外接圆 BC 弧的中点，N 是 EF 的中点，MN 交 BC 于 D. 求证：$\angle ADM=\angle BDM$.

（2006 年中国国家队培训题）

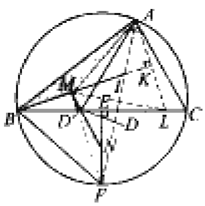


图 175

证明　熟知 $BF=IF$，故 $FM\perp BI$.

先证 $\triangle AIB\backsim\triangle MEF$，于是 $\triangle AMB\backsim\triangle MNF$.

如图 175，过 A 作 $AK\perp BI$，垂足为 K，并延长交 BC 于 L. 因 BI

是角平分线，故 BK 是 AL 的中垂线，得 $MA = ML$.

又记 MF 交 BC 于 D'，则 $\angle BDM = \angle BD'M - \angle FMN = \angle BAK - \angle BAM = \angle MAK$，由此 A, M, D, L 四点共圆.

所以 $\angle BDM = \angle MAK = \angle MLK = \angle MDA$. 证毕.

⑭③ 已知锐角 $\triangle ABC$，$\angle BAC = 60^\circ$，$AB = c$，$AC = b$，$b > c$，$\triangle ABC$ 的垂心和外心分别为 M 和 O，OM 与 AB，AC 分别交于点 X，Y. 证明：

(1) $\triangle AXY$ 的周长为 $b + c$；

(2) $OM = b - c$.

（2004 ~ 2005 年匈牙利数学奥林匹克）

证明 (1) 如图 176，易知

$\angle COB = 2\angle BAC = 120^\circ$，$\angle CMB = \angle A + 2(90^\circ - \angle A) = 120^\circ$

因此，C, O, M, B 四点共圆.

因为 $CP \perp AB$，则

$$\angle AXM = 90^\circ - \angle XMP = 90^\circ - \angle OMC = 90^\circ - \angle OBC = 60^\circ$$

故
$$\angle MXB = 120^\circ$$

又因 $\angle ABM = 30^\circ$，则 $\angle XMB = 30^\circ$. 所以

$$MX = XB$$

同理，$YM = CY$.

故 $AY + YX + AX = AY + YC + AX + XB = b + c$.

(2) 设 $AO = R$，则

$$b - c = 2R(\sin B - \sin C)$$

易知
$$OM = BC \cdot \frac{\sin\angle OCM}{\sin\angle CMB} = 2R\sin\angle CAB \cdot \frac{\sin\angle OCM}{\sin\angle CMB} = 2R\sin\angle OCM = 2R\sin(B - A)$$

故
$$b - c = OM \Leftrightarrow \sin(120^\circ - C) - \sin C = \sin(60^\circ - C) \Leftrightarrow$$
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos C + \frac{1}{2}\sin C - \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos C - \frac{1}{2}\sin C$$

上式显然成立，故原命题成立.

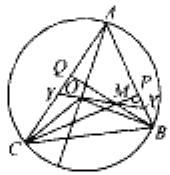


图 176

⑭④ 如图 177，$\triangle ABC$ 中，AH 是 BC 边上的高，D 是直线 BC 上任一点. O, O_1, O_2 分别是 $\triangle ABC$，$\triangle ABD$，$\triangle ACD$ 的外心，N，N_1，N_2 分别是 $\triangle ABC$，$\triangle ABD$，$\triangle ACD$ 的九点圆心. 设 O' 是 A, O, O_1, O_2 所共圆（萨蒙（Salmon）圆）的圆心，作 $O'E \perp BC$，垂足为 E. 求证：H, E, N, N_1, N_2 五点共圆.

（2006 年中国国家队培训题）

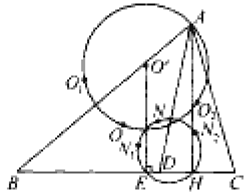


图 177

证明 先给出一个引理.

引理:如图 178,$\triangle ABC$ 中,记外心 O 关于 BC 边的对称点为 O',则九点圆心 N_i 是 AO' 的中点.(证略)

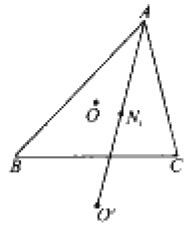


图 178

如图 179,作 A,O,O_1,O_2 诸点关于 BC 边的对称点,这些对称点仍构成共圆四边形.再以点 A 为位似中心,作$\frac{1}{2}$的位似变换,即可知所得到点 H,N,N_1,N_2 一定共圆.(且顺便得知所共圆的大小恰是萨蒙圆的一半!)

再在萨蒙圆上取 A'',使 $AA''\parallel BC$.因此 $O'E$ 所在直线是 AA'' 的中垂线.作 A'' 关于 BC 边的对称点 A'''.易知 AA''' 的中点恰是 E,于是 E 也在上述位似后的圆上.

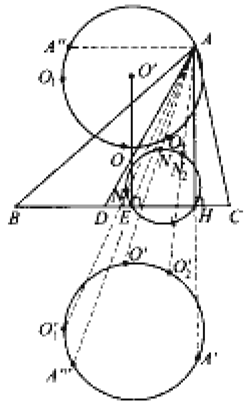


图 179

> ⑭⑤ 已知锐角 $\triangle ABC$ 的垂心为 H,内心为 I,且满足 $AC\neq BC$,CH,CI 分别与 $\triangle ABC$ 的外接圆交于点 D,L.证明:$\angle CIH=90^\circ$ 的充分必要条件是 $\angle IDL=90^\circ$.
>
> (2005 年保加利亚国际数学奥林匹克选拔赛试题)

证明 如图 180,设 $\triangle ABC$ 的外心为 O,外接圆半径为 R,点 H 在 CL 上的投影为 Q,HQ 交 LO 于点 K,LO 与圆 O 交于点 S,CL 交 DS 于点 P,AB 分别交 LO,CD 于点 M,N.

因为 $\angle AHD=\angle ABC=\angle ADH$,且 $DH\perp AB$,所以,DH 的中垂线为 AB.从而,N 是 DH 的中点.

又因为 $DC\parallel SL$,$HK\parallel CS$,所以,四边形 $DLKH$ 是等腰梯形.于是,AB 是 LK 的中垂线.因此,有

$$\frac{LQ}{LC}=\frac{LK}{LS}=\frac{LM}{R}$$

故
$$LQ=\frac{LC\cdot LM}{R}$$

因为 $PO\perp LS$,$LC\perp SC$,所以

$$\triangle LOP\backsim\triangle LCS$$

于是
$$LP=\frac{LO\cdot LS}{LC}=\frac{2R^2}{LC}$$

易知
$$LB^2=LS\cdot LM=2R\cdot LM$$

又因为 $LQ\cdot LP=2R\cdot LM$,所以

$$LP\cdot LQ=LB^2$$

由于 $LB=LI$,可得 $LP\cdot LQ=LI^2$.

特别地,$Q=I$ 等价于 $P=I$.

又因为 $\angle CIH=90^\circ$ 等价于 $Q=I$,$\angle IDL=90^\circ$ 等价于 $P=I$,所以,$\angle CIH=90^\circ$ 的充要条件是 $\angle IDL=90^\circ$.

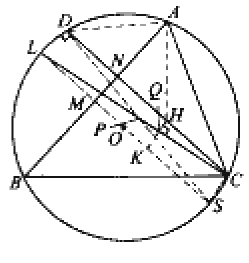


图 180

146 如图 181，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 边上一点，设 O_1，O_2 分别是 $\triangle ABD$、$\triangle ACD$ 的外心，O' 是经过 A，O_1，O_2 三点的圆之圆心．记 $\triangle ABC$ 的九点圆心为 N_1．作 $O'E \perp BC$，垂足为 E．求证：$N_1E \parallel AD$．

（2006 年中国国家队培训题）

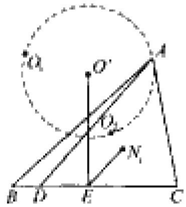


图 181

证明　如图 182，设 O 和 H 分别是 $\triangle ABC$ 的外心和垂心，联结 AO，作 $O'L \perp AO$，垂足为 L，作 $LK \perp AH$，垂足为 K，作 $OM \perp BC$，垂足为 M，作 $N_1F \perp BC$，垂足为 F．由 $AH = 2OM$，$N_1F = \dfrac{OM + HG}{2}$ 易知

$$AK = N_1F \quad ①$$

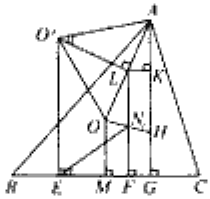


图 182

又因为 $O'L$ 在 BC 上的射影是 EF，而 AL 在 AG 上的射影是 AK，且两者夹角相等（都等于 $\frac{1}{2}|\angle B - \angle C|$），故

$$\frac{O'L}{EF} = \frac{AL}{AK} \quad ②$$

由 ①，② 知 $\mathrm{Rt}\triangle AO'L \backsim \mathrm{Rt}\triangle N_1EF$，得

$$\angle AO'L = \angle N_1EF \quad ③$$

而由图 183，又易知

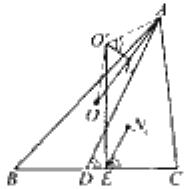


图 183

$$\angle AO'L = \angle ADC \quad ④$$

由 ③，④ 得
$$\angle N_1EC = \angle ADC$$
所以
$$N_1E \parallel AD$$

147 已知圆 O_1 与圆 O_2 外切于点 T，一直线与圆 O_2 相切于点 X，与圆 O_1 交于点 A，B，且点 B 在线段 AX 的内部，直线 XT 与圆 O_1 交于另一点 S．C 是不包含点 A，B 的 $\overset{\frown}{TS}$ 上的一点，过点 C 作圆 O_2 的切线，切点为 Y 且线段 CY 与线段 ST 不相交，直线 SC 与 X 交于点 I．证明：

（1）C，T，I，Y 四点共圆；

（2）I 是 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 内的旁切圆的圆心．

（2005 年保加利亚国家数学奥林匹克）

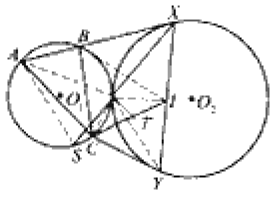


图 184

证明　（1）作辅助线如图 184 所示．

因为 $\overset{\frown}{ST} = \overset{\frown}{XT}$，则

$$\angle BXT = \frac{\overset{\frown}{XT}^{\circ}}{2} = \frac{\overset{\frown}{ST}^{\circ}}{2} = \angle TAS$$

从而，$\triangle SAT \backsim \triangle SXA$.

故 $\angle XAS = \angle ATS$，即 $\overset{\frown}{BS} = \overset{\frown}{AS}$.

所以，S 是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点.

因为 $\angle TCI = \angle TAS = \angle BXT = \angle TYX$.

所以，C,T,I,Y 四点共圆.

(2) 由于 $\triangle SAT \backsim \triangle SXA$，则有 $SA^2 = ST \cdot SX$.

又 C,T,I,Y 四点共圆，有

$$\angle CIT = \angle CYT = \angle TXY$$

于是，$\triangle SXI \backsim \triangle SIT$.

因此，$SI^2 = ST \cdot SX$. 所以，$SA = SI$.

设 $\angle BAC = \alpha$，$\angle ABC = \beta$，$\angle ACB = \gamma$，则

$$\angle ACS = \frac{\overset{\frown}{AS}^\circ}{2} = \frac{\overset{\frown}{ASB}^\circ}{4} = \frac{1}{4}(2\pi - 2\gamma) = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$$

故 $$\angle BCI = \pi - \angle BCS = \pi - \left(\gamma + \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}$$

因此，CI 是 $\angle ACB$ 的外角平分线.

又因为 $SB = SA = SI$，$\angle BSI = \angle BSC = \alpha$，所以

$$\angle BIS = \frac{\pi - \angle BSI}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

在 $\triangle BCI$ 中，可得 $\angle CBI = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2}$，即 BI 是 $\angle ABC$ 的外角平分线，所以，点 I 是 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 内的旁切圆的圆心.

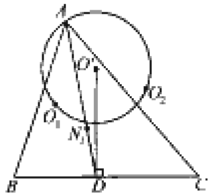


图 185

148 如图 185，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 边上一点，设 O_1,O_2 分别是 $\triangle ABD$，$\triangle ACD$ 的外心，O' 是经过 A,O_1,O_2 三点的圆之圆心. 求证：$O'D \perp BC$ 的充要条件是：AD 恰好经过 $\triangle ABC$ 的九点圆心.

(2006 年中国国家队培训题)

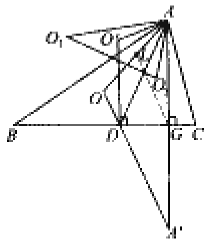


图 186

证明 取 $\triangle ABC$ 的外心 O，则熟知 A,O,O_1,O_2 四点共圆(萨蒙圆). 易知 $\triangle AO_1O_2 \backsim \triangle ABC$，且 O_1O_2 是 AD 的垂直平分线. 作顶点 A 关于 BC 边的对称点 A'，易看出 $\triangle AO'D \backsim \triangle AOA'$. 设 BC 边高的垂足为 G，再取 AO 连线的中点 L，则 LG 是 $\triangle AOA'$ 的中位线，进而知 $\triangle AO'D \backsim \triangle ALG$. 得

$$\angle O'DA = \angle LGA \qquad ①$$

再作外心 O 关于 BC 的对称点 O''，如图 187 所示，由 $AH = 2OM = OO''$ 知 AO'' 经过九点圆心 N_1.(注：$\triangle AHN_1 \cong \triangle O''ON_1$)

由 $LM \mathrel{\underset{=}{\parallel}} AO''$ 知 $\angle ADC = \angle LMG$；在直角梯形 $AOMG$ 中，得 $\angle LMG = \angle LGM$. 故

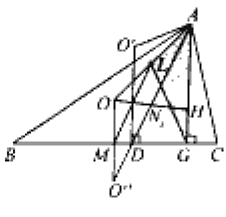


图 187

$$\angle ADC = \angle LGM \quad ②$$

而
$$\angle LGM + \angle LGA = 90^\circ$$

将①,②代入得
$$\angle O'DA + \angle ADC = 90^\circ$$

所以 $O'D \perp BC$.

⑭⑨ 设 A,B,C 是圆 O 上三个不同的点,过点 B,C 分别作与 BC 垂直的直线 h 和 g,AB 的中垂线与 h 交于点 F,AC 的中垂线与 g 交于点 G.证明:当 B,C 固定时,$BF \cdot CG$ 不依赖于点 A 的选取.

(2005 年德国数学奥林匹克)

证明 如图 188,设 D,E 为 AB,AC 的中点.则 $FD \perp AB$,$GE \perp AC$.所以

$$BF = \frac{BD}{\sin \angle BFD} = \frac{BD}{\sin \angle ABC} = \frac{AB}{2\sin \angle ABC}$$

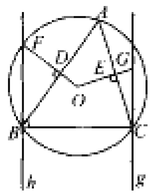


图 188

同理
$$CG = \frac{AC}{2\sin \angle ACB}$$

故
$$BF \cdot CG = \frac{AB \cdot AC}{4\sin \angle ABC \cdot \sin \angle ACB} = \frac{4R^2\sin \angle ABC \cdot \sin \angle ACB}{4\sin \angle ABC \cdot \sin \angle ACB} = R^2$$

⑮⓪ $\triangle ABC$ 的角平分线 BB_1 和 CC_1 交于点 I.直线 B_1C_1 交 $\triangle ABC$ 外接圆于点 M 和 N.证明:$\triangle MIN$ 的外接圆的半径是 $\triangle ABC$ 外接圆的半径的 2 倍.

(2006 年俄罗斯数学奥林匹克)

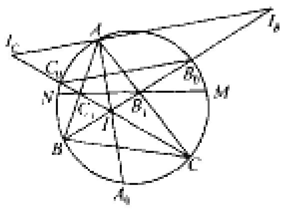


图 189

证明 设角平分线 AI,BI 和 CI 分别与外接圆交于点 A_0,B_0 和 C_0.点 B_0 和 C_0 分别是圆弧$\overset{\frown}{AC}$和$\overset{\frown}{AB}$的中点.过点 A 作直线平行于直线 B_0C_0,与角平分线分别交于 I_B 和 I_C.我们有

$$\angle AIB_0 = \angle ABB_0 + \angle BAA_0 = \angle B_0BC + \angle CAA_0 = \angle B_0AI$$

因此 $\triangle B_0AI$ 是等腰三角形($B_0A = B_0I$).类似地,$C_0A = C_0I$.故

$$\triangle B_0AC_0 \cong \triangle B_0IC_0$$

进一步,线段 B_0C_0 是线段 AI 的垂直平分线,AI 是 $\triangle II_BI_C$ 的高.因此,B_0C_0 是 $\triangle I_BII_C$ 的中位线.这样我们得到下面关于外接圆半径的关系

$$R(I_BII_C) = 2R(B_0IC_0) = 2R(B_0AC_0) = 2R(ABC)$$

接下来只须证明:点 M 和 N 位于 $\triangle I_BII_C$ 的外接圆上.注意到

$$\angle AI_BI = \angle C_0B_0I = \angle C_0B_0A = \angle C_0CA = \angle ICA$$

故 A, I, C, I_B 四点共圆，这推出

$$B_1A \cdot B_1C = B_1I \cdot B_1I_B$$

另一方面，因为 A, M, C, N 四点共圆，有

$$B_1A \cdot B_1C = B_1M \cdot B_1N$$

这样

$$B_1M \cdot B_1N = B_1I \cdot B_1I_B$$

这推出点 I_B 位于 $\triangle IMN$ 的外接圆上．类似地，I_C 也位于 $\triangle IMN$ 的外接圆上．

151 已知 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，圆心为 O，内接圆的半径为 r，圆心为 I，且 $I \neq O$．$\triangle ABC$ 的重心为 G．求证：当且仅当 $b = c$ 或 $b + c = 3a$ 时，$IG \perp BC$．

（2005 年罗马尼亚数学奥林匹克）

解法 1 设 $b \geqslant c$．设点 A, I, G 在 MB 上的正交投影分别为 A', I', G'（M 为 BC 的中点）．易知

$$MI' = MB - BI' = \frac{a}{2} - (p - b) = \frac{b - c}{2}$$

又因为

$$c^2 - A'B^2 = b^2 - (a - A'B)^2$$

则

$$MG' = \frac{1}{3}MA' = \frac{1}{3}|MB - A'B| = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right) = \frac{b^2 - c^2}{6a}$$

综上知，$IG \perp BC$ 等价于 I' 与 G' 重合，即 $MI' = MG'$，亦即

$$(b - c)(b + c - 3a) = 0$$

所以，当且仅当 $b = c$ 或 $b + c = 3a$ 时，$IG \perp BC$．

解法 2 用向量的方法．

由 $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$，$\overrightarrow{AI} = \frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{a + b + c}$，知

$$\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3(a + b + c)}((a + c - 2b)\overrightarrow{AB} + (a + b - 2c)\overrightarrow{AC})$$

又

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$$

所以

$$\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3(a + b + c)}\left[(a + b - 2c)b^2 - (a + c - 2b)c^2 + (3c - 3b)\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}\right] = \frac{1}{6}(c - b)(b + c - 3a)$$

由 $\overrightarrow{IG} \perp \overrightarrow{BC}$，知 $\overrightarrow{IG} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$，即当且仅当 $b = c$ 或 $b + c = 3a$ 时，$IG \perp BC$.

⑮② 在 $\triangle ABC$ 的外接圆的圆弧 $\overparen{AB}$（不含点 C）和圆弧 $\overparen{BC}$（不含点 A）上分别取点 K 和 L，使得直线 KL 与直线 AC 平行. 证明：$\triangle ABK$ 和 $\triangle CBL$ 的内心到圆弧 $\overparen{AC}$（包含点 B）中点的距离相等.

（2006 年俄罗斯数学奥林匹克）

证明 如果 $AB = BC$，结论显然. 下设 $AB < BC$. 我们用 I_1，I_2 分别表示 $\triangle AKB$ 和 $\triangle CLB$ 的内心，用 P，Q 表示直线 BI_1，BI_2 与 $\triangle ABC$ 外接圆的两个交点，R 表示圆弧 $\overparen{ABC}$ 的中点. 由 $KL \parallel AC$，得 $AK = BK$，则 $PA = QC$. 因为

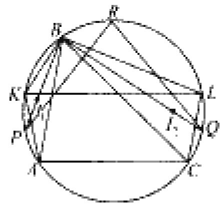


图 190

$$\angle PAI_1 = \angle PAK + \angle KAI_1 = \angle PBK + \angle BAI_1 = \angle ABI_1 + \angle BAI_1 = \angle AI_1P$$

所以 $\triangle AI_1P$ 是等腰三角形，$PA = PI_1$. 类似地，$QC = QI_2$；这推出，$PI_1 = QI_2$. 进一步，有

$$PR = QR, \angle I_2QR = \angle I_1PR$$

故 $\triangle RI_1P \cong RI_2Q$. 所以 $RI_1 = RI_2$.

⑮③ 已知平面上一个半径为 R 的定圆圆 O，A，B 是圆 O 上的两个定点，且 A，B，O 不共线，C 为异于 A，B 的点，过点 A 作圆 O_1 与直线 BC 切于点 C，过点 B 作圆 O_2 与直线 AC 切于点 C，圆 O_1 与圆 O_2 相交于点 D（异于点 C）. 证明：

(1) $CD \leqslant R$；

(2) 当点 C 在圆 O 上移动，且与 A，B 不重合时，直线 CD 过一定点.

（2005 年越南数学奥林匹克）

证明 (1) 如图 191，由圆 O_1 和圆 O_2 的作法知

$$\angle CAD = \angle DCB \quad ①$$

$$\angle ACD = \angle CBD \quad ②$$

所以，$\triangle DAC \backsim \triangle DCB$. 故 $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{DC}{DB}$，即

$$CD^2 = DA \cdot DB \quad ③$$

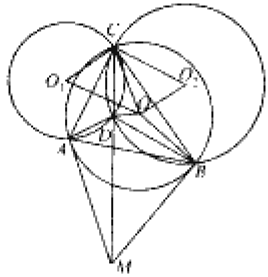


图 191

对 $\triangle ADB$ 应用余弦定理得

$$AB^2 = AD^2 + DB^2 - 2AD \cdot DB \cdot \cos \angle ADB$$

$$AB^2 \geqslant 2AD \cdot DB(1 - \cos\angle ADB) \quad ④$$

由式③,④得

$$AB^2 \geqslant 2CD^2(1 - \cos\angle ADB) \quad ⑤$$

对 $\triangle ABC$ 应用正弦定理得

$$AB = 2R \cdot \sin\angle ACB$$

代入式⑤得

$$2R^2 \cdot \sin^2\angle ACB \geqslant CD^2(1 - \cos\angle ADB) \quad ⑥$$

由式①,②得

$$\angle CAD + \angle ACD = \angle DCB + \angle CBD = \angle CAD + \angle CBD = \angle DCB + \angle DCA = \angle ACB \quad ⑦$$

则

$$\angle ADC = \angle BDC = 180^\circ - \angle ACB \quad ⑧$$

进一步,易得:

点 C,D 位于直线 AB 的同侧 $\Leftrightarrow$

$\angle CAD + \angle CBD < \angle CAB + \angle CBA$

点 C,D 位于直线 AB 的两侧 $\Leftrightarrow$

$\angle CAD + \angle CBD > \angle CAB + \angle CBA$

于是,由式⑦得:当 $\angle ACB$ 为锐角时,点 C,D 位于直线 AB 的同侧;

当 $\angle ACB$ 为钝角时,点 C,D 位于直线 AB 的两侧.

又由式⑧得:

当 $\angle ACB$ 为锐角时

$$\angle ADB = 360^\circ - (\angle ADC + \angle CDB) = 2\angle ACB$$

当 $\angle ACB$ 为钝角时

$$\angle ADB = \angle ADC + \angle CDB = 360^\circ - 2\angle ACB$$

所以,在所有情形中均有

$$\cos\angle ADB = \cos 2\angle ACB$$

因此,由式⑥有 $CD \leqslant R$.

(2) 由前面的证明易得:

(i) CD 为 $\angle ADB$ 的角平分线;

(ii) 点 O,D 位于线段 AB 的同侧;

(iii) $\angle ADB = \angle AOB$.

由(ii),(iii)可知,当点 C 在圆 O 上移动时(但 C 与 A,B 不重合),点 D 在 $\triangle AOB$ 的外接圆的 $\overset{\frown}{AOB}$ 上移动.因此,(i)证明 CD 过定点,即 $\triangle AOB$ 的外接圆上不含点 O 的 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点 M.

154 与等腰△ABC两腰AB和AC都相切的圆ω交边BC于点K和L.联结AK,交圆ω于另一点M.点P和Q分别是点K关于点B和C的对称点.证明:△PMQ的外接圆与圆ω相切.

(2006年俄罗斯数学奥林匹克)

证明 设圆ω与边AB,AC相切的切点分别为D,E,因为DE和BC均垂直于$\angle BAC$的角平分线,所以$DE // BC$.在以A为中心,系数为$\frac{AK}{AM}$的位似变换下,圆ω变为ω'.圆ω'通过K,因此,通过L,并且分别与射线AB和AC切于某点D'和E'.

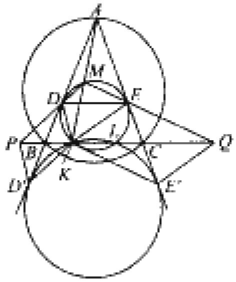


图 192

由位似的性质,$MD // KD'$.接下来,由圆幂定理,有

$$BD^2 = BK \cdot BL = BD'^2$$

故$BD = BD'$.又因为$BK = BP$,所以$DKD'P$是平行四边形,这推出$PD // KD'$.因此,M,D,P三点共线.类似地得到,M,E,Q三点共线.这样,△MDE和△MPQ关于中心M位似.故它们的外接圆也位似,所以在点M处相切.

155 设△ABC的外接圆为Γ,$\angle A = 90°$,$\angle B < \angle C$.过点A作圆Γ的切线与BC交于点D,点E是点A关于BC的对称点,点A在BE上的投影为X,Y是AX的中点,BY与圆Γ的第二个交点为Z.证明:BD与△ADZ的外接圆相切.

(2005年土耳其国际数学奥林匹克代表队选拔赛试题)

证明 如图193,作直径AN,联结NE.

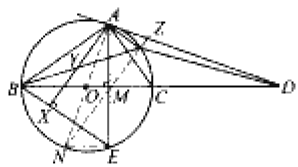


图 193

下面证明,N,M,Z三点共线,只须证明$\angle ANM = \angle ANZ$,即

$$\angle ANM = \angle ABZ$$

因为AN是直径,于是,$AE \perp EN$.

易知$\angle ANE = \angle ABE = \angle ABX$,则

$$Rt\triangle ABX \backsim Rt\triangle ANE$$

又$\frac{AB}{AN} = \frac{AX}{AE} = \frac{AY}{AM}$,则△$ABY \backsim$△$ANM$,所以

$$\angle ANM = \angle ABY = \angle ABZ$$

故N,M,Z三点共线.从而

$$NM \cdot MZ = MA \cdot ME = MO \cdot MD$$

于是,N,O,Z,D四点共圆,进而

$$\angle MDZ = \angle MNO = \angle ZNA = \angle ZAD$$

因此,BD是△AZD外接圆的切线.

⑮⑥ 在 $\triangle ABC$ 的边 AB，BC，CA 上分别取点 P，Q，R，使得 $AP=CQ$，且四边形 $RPBQ$ 是圆内接四边形．过点 A 和 C 分别作 $\triangle ABC$ 的外接圆的切线，交直线 RP 和 RQ 于点 X 和 Y．证明：$RX=RY$．

（2006 年俄罗斯数学奥林匹克）

证明　首先注意到，由于

$$\angle ARP < \angle ARP + \angle QRC = \angle ABC$$

点 X 位于射线 RP 上．故

$$\angle ACB = \angle XAB, \angle APX = \angle RPB = \angle RQC$$

这推出

$$\triangle APX \cong \triangle CQR$$

由此，$PX=QR$．类似地，$PR=QY$．故

$$PX = PR + PX = QY + QR = RY$$

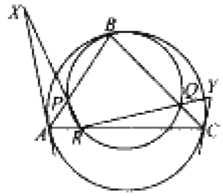


图 194

⑮⑦ 已知 $\triangle ABC$ 的内切圆与其边 AC，BC，AB 分别切于点 M，N，R．设 S 为劣弧 $\overset{\frown}{MN}$ 上的一点，l 为过点 S 的切线，且与 NC，MC 分别交于点 P，Q．求证：线段 AP，BQ，SR 与 MN 交于一点．

（2005 年克罗地亚数学奥林匹克）

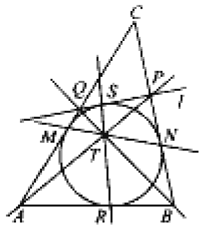


图 195

证明　如图 195，设 T_1 是直线 MN，QB 的交点，T_2 是直线 SR，QB 的交点．

下面证明

$$T_1 = T_2$$

因为 $CM=CN$，则

$$\angle T_1MQ = \angle T_1NC = 180^\circ - \angle T_1NB$$

显然

$$\angle MT_1Q = \angle BT_1N$$

对 $\triangle MT_1Q$，$\triangle BT_1N$ 应用正弦定理得

$$\frac{QT_1}{MQ} = \frac{\sin\angle T_1MQ}{\sin\angle MT_1Q} = \frac{\sin(180^\circ - \angle T_1NB)}{\sin\angle BT_1N} = \frac{\sin\angle T_1NB}{\sin\angle BT_1N} = \frac{T_1B}{BN}$$

从而

$$\frac{QT_1}{BT_1} = \frac{MQ}{BN}$$

类似地，有

$$\angle T_2SQ = \angle T_2RA = 180^\circ - \angle T_2RB$$

$$\angle ST_2Q = \angle RT_2B$$

对 $\triangle ST_2Q$，$\triangle RT_2B$ 应用正弦定理得

$$\frac{QT_2}{SQ}=\frac{\sin\angle T_2SQ}{\sin\angle ST_2Q}=\frac{\sin(180^\circ-\angle T_2RB)}{\sin\angle RT_2B}=$$

$$\frac{\sin\angle T_2RB}{\sin\angle RT_2B}=\frac{T_2B}{BR}$$

从而
$$\frac{QT_2}{BT_2}=\frac{SQ}{BR}$$

又因为 $MQ=SQ,BN=BR$,所以

$$\frac{QT_1}{BT_1}=\frac{QT_2}{BT_2}$$

由于 T_1、T_2 均在 BQ 上,故 $T_1=T_2$.

用直线 AP 代替 QB,同理可知,类似的结论成立.

因此,直线 AP、BQ、SR 与 MN 交于一点 T.

158 如图 196,圆 ω 与 $\triangle ABC$ 的外接圆相切于点 A,与边 AB 交于点 K,且和边 BC 相交.过点 C 作圆 ω 的切线,切点为 L,联结 KL,交边 BC 于点 T.证明:线段 BT 的长等于点 B 到圆 ω 的切线长.

(2006 年俄罗斯数学奥林匹克)

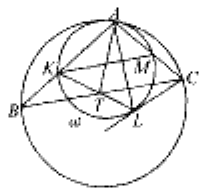


图 196

证明 设 M 是圆 ω 与边 AC 的第二个交点.下证四边形 $ATLC$ 是圆内接的.事实上,注意到,以点 A 为中心的一个位似变换将圆 ω 变为 $\triangle ABC$ 的外接圆,直线 MK 变为直线 CB,因此,它们平行.这样,我们得到

$$\angle AMK=\angle ACB=\angle ACT$$

由四边形 $AMLK$ 是圆内接的,得

$$\angle AMK=\angle ALK=\angle ALT$$

故 $\angle ACT=\angle ALT$,即四边形 $ATLC$ 是圆内接的.故

$$\angle CTA=\angle CLA=\angle TKA$$

这推出 $\angle BTA=\angle BKT$.故 $\triangle BTA\backsim\triangle BKT$.由此 $BT^2=BK\cdot BA$.另一方面,乘积 $BK\cdot BA$ 等于从点 B 到圆 ω 的切线的长的平方.

159 $\triangle ABC$ 为锐角三角形,D、E 分别为点 A、B 到边 BC、CA 的垂足.以 BC 为直径向外作半圆与直线 AD 相交于点 P,以 AC 为直径向外作半圆与直线 BE 相交于点 Q.证明:$CP=CQ$.

(2005 年英国数学奥林匹克)

解法1　注意到$\triangle CEQ$与$\triangle QEA$所有对应角相等，因此，两三角形相似．由此得

$$\frac{CE}{EQ}=\frac{EQ}{EA}$$

即
$$CE\cdot EA=EQ^2$$

既然$CE+EA=CA$，则有

$$CE\cdot CA-CE^2=EQ^2$$

由勾股定理知

$$CE^2+EQ^2=CQ^2$$

故
$$CQ^2=CE\cdot CA$$

根据构造的对称性，类似可得

$$CP^2=CD\cdot CB$$

因为由垂直建立的$\triangle ACD$和$\triangle BCE$相似，则有$\frac{CA}{CD}=\frac{CB}{CE}$，即

$$CE\cdot CA=CD\cdot CB$$

从而，$CP^2=CQ^2$．所以，$CP=CQ$．

解法2　令$\angle ACB=\alpha$，$\angle BCP=\beta$，$\angle ACQ=\gamma$，如图197所示，考虑Rt$\triangle BEC$，Rt$\triangle ADC$，Rt$\triangle PDC$，Rt$\triangle QEC$，Rt$\triangle BPC$，Rt$\triangle AQC$．

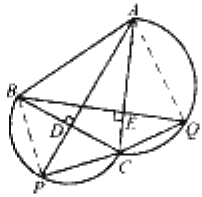


图197

可以得到

$$EC=BC\cdot\cos\alpha$$
$$DC=AC\cdot\cos\alpha$$
$$PC=DC\cdot\sec\beta=AC\cdot\cos\alpha\cdot\sec\beta$$
$$QC=EC\cdot\sec\gamma=BC\cdot\cos\alpha\cdot\sec\gamma$$
$$BC=PC\cdot\sec\beta=AC\cdot\cos\alpha\cdot\sec^2\beta$$
$$AC=QC\cdot\sec\gamma=BC\cdot\cos\alpha\cdot\sec^2\gamma$$

将最后两式相乘得

$$BC^2(\sec\gamma)^2\cos\alpha=AC^2(\sec\beta)^2\cos\alpha$$

由于$\triangle ABC$为锐角三角形，则$\cos\alpha$不为零，故

$$BC^2(\sec\gamma)^2=AC^2(\sec\beta)^2$$

因为β和γ为锐角，$\sec\beta$和$\sec\gamma$为正，上式两边取正平方根得

$$BC\cdot\sec\gamma=AC\cdot\sec\beta$$

故
$$CP=AC\cdot\sec\beta\cdot\cos\alpha=BC\cdot\sec\gamma\cdot\cos\alpha=CQ$$

解法3　用向量法．

取C为原点．令$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{p},\boldsymbol{q}$分别为$A,B,P,Q$的位置向量，$M$，$N$分别为$BC$和$AC$的中点，$\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}$分别为$M,N$的位置向量，则

$$m = \frac{\boldsymbol{b}}{2}, n = \frac{\boldsymbol{a}}{2}$$

因为 $AP \perp BC$，所以，$(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = 0$，即

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \quad ①$$

又因为点 P 在以 CM 为半径的圆上，于是

$$\left|\boldsymbol{p} - \frac{\boldsymbol{b}}{2}\right| = \left|\frac{\boldsymbol{b}}{2}\right|$$

故

$$\left(\boldsymbol{p} - \frac{\boldsymbol{b}}{2}\right) \cdot \left(\boldsymbol{p} - \frac{\boldsymbol{b}}{2}\right) = \frac{\boldsymbol{b}}{2} \cdot \frac{\boldsymbol{b}}{2} \Rightarrow$$

$$|\boldsymbol{p}|^2 - 2\boldsymbol{p} \cdot \frac{\boldsymbol{b}}{2} + \frac{|\boldsymbol{b}|^2}{4} = \frac{|\boldsymbol{b}|^2}{4}$$

由此可得

$$|\boldsymbol{p}|^2 = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{p} \quad ②$$

联立方程①，②，有

$$|\boldsymbol{p}|^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

同理

$$|\boldsymbol{q}|^2 = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$$

所以，$|\boldsymbol{p}|^2 = |\boldsymbol{q}|^2$，即 $|\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{q}|$.

解法4 令 H 为 BE 和 AD 的交点.事实上，H 为 $\triangle ABC$ 的垂心.

设 P' 为点 P 关于直线 CB 的对称点，类似定义 Q'. 因为 $\angle BHC = \angle B + \angle C$ 为钝角，则 H 必位于以 CB 为直径的圆内，所以，P' 在 H 和 A 之间. 又

$$PD^2 - DH^2 = (PD + DH)(PD - DH) = PH \cdot HP'$$

由相交弦定理得

$$PH \cdot HP' = BH \cdot HE = AH \cdot HD$$

类似可得

$$QH \cdot HQ' = PH \cdot HP'$$

所以

$$PD^2 - DH^2 = QE^2 - EH^2$$

在图的平面外点 H 的正上方取一点 X，使得

$$XH^2 = PD^2 - DH^2 = QE^2 - EH^2$$

则将 $\triangle BPC$ 和 $\triangle AQC$ 分别沿 BC，AC 折叠起来，P 和 Q 将交于为 X. 因此 $CQ = CP$.

⑯⓪ 设 E，F 分别是凸四边形 $ABCD$ 的边 AD 和 BC 上的点，满足：$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$，射线 FE 分别与射线 BA 和 CD 交于点 S 和 T. 证明：$\triangle SAE$，$\triangle SBF$，$\triangle TCF$ 和 $\triangle TDE$ 的外接圆有一个公共点.

（2006 年美国数学奥林匹克）

证明 设 $\triangle TCF$ 和 $\triangle TDE$ 的外接圆交于另一点 P（异于点

T)，下面证明：P,A,E,S 共圆；P,B,F,S 共圆.

注意到，P,E,D,T 共圆，故

$$\angle PDE=\angle PTE,\angle PED=180^\circ-\angle PTD$$

P,F,C,T 共圆，故

$$\angle PCF=\angle PTF,\angle PFC=180^\circ-\angle PTC$$

所以，$\angle PDE=\angle PCF,\angle PED=\angle PFC$，从而，$\triangle PDE\backsim\triangle PCF$. 于是，$\frac{PE}{PF}=\frac{ED}{FC}$，结合条件$\frac{AE}{BF}=\frac{ED}{FC}$，可知$\frac{PE}{PF}=\frac{AE}{BF}$.

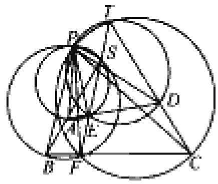


图 198

在 $\triangle APE$ 和 $\angle BPF$ 中

$$\angle AEP=180^\circ-\angle PED=180^\circ-\angle PFC=\angle BFP$$

而前面已推出$\frac{PE}{PF}=\frac{AE}{BF}$，所以，$\triangle APE\backsim\triangle BPF$. 进而，$\angle BPF=\angle APE$，$\frac{PE}{PF}=\frac{PA}{PB}$，前者导出$\angle BPA=\angle FPE$，结合后一等式可知$\triangle PBA\backsim\triangle PFE$，从而，$\angle PBA=\angle PFE$，即$\angle PBS=\angle PFS$，所以，$P,B,F,S$ 共圆.

进一步，由 $\triangle PBA\backsim\triangle PFE$ 知，$\angle PAB=\angle PEF$，故

$$\angle PAS=180^\circ-\angle PAB=180^\circ-\angle PEF=\angle PES$$

从而，P,A,E,S 共圆.

命题获证.

161 设凸四边形的外接圆和内切圆的圆心分别为 O,I，对角线 AC,BD 相交于点 P. 证明：O,I,P 三点共线.

(2005 年捷克－波兰－斯洛伐克数学奥林匹克)

证明 如图 199，AI,BI,CI,DI 与圆 O 分别交于点 E,F,G,H. 由于 AI,BI,CI,DI 分别是四边形 $ABCD$ 四个内角的角平分线，则 EG 和 FH 是圆 O 的直径，即 EG,FH 交于点 O.

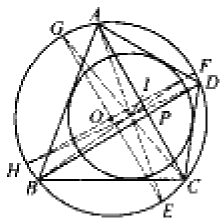


图 199

设 EB 和 CH 交于点 X，对广义六边形 $ACHDBE$，应用帕斯卡定理，知 P,X,I 三点共线.

对广义六边形 $GCHFBE$ 也用帕斯卡定理，知 O,X,I 三点共线.

所以，O,I,P 三点共线.

162 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle BAC=120^\circ$. 设 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的平分线分别交其对边于点 D,E,F. 证明：以 EF 为直径的圆过点 D.

(2005 年英国数学奥林匹克)

解法 1 在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得

$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{BC}{\sin 120^\circ}\Rightarrow\frac{AC}{BC}=\frac{\sin B}{\sin 60^\circ}$$

由角平分线定理知

$$\frac{AF}{FB}=\frac{AC}{CB}=\frac{\sin B}{\sin 60^\circ}$$

在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理得

$$\frac{AD}{\sin B}=\frac{BD}{\sin 60^\circ}$$

则
$$\frac{AD}{BD}=\frac{\sin B}{\sin 60^\circ}=\frac{AF}{FB}$$

由角平分线定理，知 FD 平分 $\angle ADB$.

类似地，ED 平分 $\angle ADC$. 因此

$$\angle EDF=\frac{\angle CDA+\angle ADB}{2}=90^\circ$$

所以，以 EF 为直径的圆过点 D.

解法 2 考虑 $\triangle ABD$. 易知点 E 在 $\angle ABD$ 的内角平分线及 $\angle BAD$ 的外角平分线上. 因此，E 是 $\triangle ABD$ 的旁切圆圆心. 从而，点 E 在 $\angle BDA$ 的外角平分线上，即 ED 平分 $\angle ADC$.

类似地，有 FD 平分 $\angle ADB$. 因此，$\angle EDF$ 是直角. 所在，点 D 在以 EF 为直径的圆上.

(163) 设 $A_0,A_1,\cdots,A_5$ 是圆周 Γ 上顺序排列的六个点，对于 $k=0,1,2$，过点 A_{2k} 作平行于直线 $A_{2k+2}A_{2k+4}$ 的直线，交圆 Γ 于 A'_{2k}，直线 $A'_{2k}A_{2k+3}$ 与 $A_{2k+2}A_{2k+4}$ 交于点 A'_{2k+3}. 如果直线 $A_{2k}A_{2k+3}(k=0,1,2)$ 三线共点，证明：直线 $A_{2k}A'_{2k+3}(k=0,1,2)$ 也三线共点.

注：对 $n\geqslant 6$，$A_n=A_i$，其中 $i=n(\mathrm{mod}\ 6)$，$0\leqslant i\leqslant 5$.

(2005 年巴尔干地区数学奥林匹克)

证明 证明依赖于下述引理给出的具有斯坦纳型关系的结论.

引理：如图 200，设圆 Γ 是 $\triangle ABC$ 的外接圆，M 是不包含点 A 的 $\overset{\frown}{BC}$ 上的一点，过点 A 作 BC 的平行线交圆 Γ 于点 A'，线段 AM，$A'M$ 分别交 BC 于点 N,N'，则

$$\frac{N'B}{N'C}=\frac{NB}{NC}\left(\frac{AC}{AB}\right)^2$$

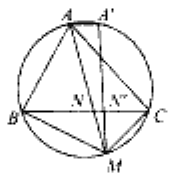


图 200

引理的证明：由于线段 AA' 平行于线段 BC，则 MN，MN' 在 $\triangle MBC$ 中分出两个等角（即 $\angle BMN=\angle CMN'$——译注），利用斯坦纳定理，可得

$$\frac{NB}{NC}\cdot\frac{N'B}{N'C}=\left(\frac{MB}{MC}\right)^2=\left(\frac{\sin\angle BAM}{\sin\angle CAM}\right)^2=\left(\frac{NB}{NC}\cdot\frac{AC}{AB}\right)^2$$

下面证明原题.

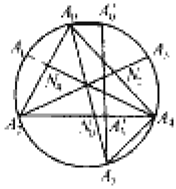


图 201

如图 201，设 $A_{2k}A_{2k+3}\cap A_{2k+2}A_{2k+4}=\{N_{2k}\}(k=0,1,2)$. 在 $\triangle A_0A_2A_4$ 中利用引理和塞瓦定理，相应的线段为 $A_{2k}N_{2k}(k=0,1,2)$，可得

$$\prod_{k=0,1,2}\frac{A'_{2k+3}A_{2k+2}}{A'_{2k+3}A_{2k+4}}=\prod_{k=0,1,2}\left[\frac{N_{2k}A_{2k+2}}{N_{2k}A_{2k+4}}\left(\frac{A_{2k}A_{2k+4}}{A_{2k}A_{2k+2}}\right)^2\right]=1$$

结论成立.

编辑手记

在本书的最后,我们想把本书的策划思想向各位读者交待一下。

首先作为大学出版社的数学工作室,我们一直致力于数学奥林匹克与数学文化的普及与推广。我们也有自己的梦想,那就是成为这一领域的阿西莫夫(他的两个突出特点一是终生孤军奋战,二是在有生之年出书逾百部),所以这本书是宏伟构图中的一块砖。

数学奥林匹克是一项智力角逐,赢者会获得巨大荣耀,如最近的菲尔兹奖得主俄罗斯的佩雷尔曼和澳大利亚的陶哲轩都曾是中学时代的获奖者。其他行业中的佼佼者中也不乏其人,如风险投资家CCTV 2006经济人物沈南鹏,等等。但这项活动在中国有其独特的走向。

钱钟书先生说"都市之显学必为俗学",数学奥林匹克近十年在中国"泛滥成灾",成为中学课程中的"帝国主义",大肆"侵占"其他学科的领地和学生学习其他学科的时间,将他们降为附属,这是极不正常的,我们必须有所反思。

我们绝不能将获奖者等同于数学家,这之间还有巨大差距。

黄炎培先生的孙女、中国著名水利学家、清华大学教授黄万里先生的长女、杨乐先生的夫人黄且圆女士在一篇纪念陈省身先生的文章"白云深处可耕田"(见《纪念陈省身先生文集》,浙江大学出版社,2005)中说:陈省身于1995年的一次报告中提及中学生数学奥林匹克的问题。他说,我是支持数学竞赛的,对数学竞赛的获奖者也一再给以鼓励,希望他们成功。但是数学竞赛的题目都不是好的题目,因为在两三个钟头里由青少年学生能做出来的技巧性题目,不可能有很深的含义,这样说,并不是说奥林匹克竞赛题目都出得不好,其含义是,数学奥林匹克竞赛获奖只是一个能力的表现,离研究一个"好的数学"问题还差得很远,更不可以把数学奥林匹克竞赛获奖者等同于数学家。

但从存在即是合理的角度来看，数学奥林匹克在中国的兴起有其内在的合理性。先是教育内容作为一个产品供应的单一化，由于教育体制的大一统格局使数学教育"千篇一律"，"亿人同书"，有悖于这个个性化的时代。用单墫教授的比喻来说课堂数学是日常生活中的大众服装，而竞赛数学则是T型台上的时装，经济学上说有需求就有供给，竞赛数学于是应运而生。

第二个需要说明的是为什么要选择平面几何，这其间有两点考虑，技术性的考虑是我们已经有了一点平面几何方面的积累。如沈文选老师，叶中豪先生，田廷彦先生的著作以及即将出版的肖振纲老师的大作。此外，奥林匹克数学特别是几何问题具有优良的传递信息功能。按获得诺贝尔经济学奖的斯宾赛(A. Mich Ael Spence)和阿克洛夫(George A. Akerlof)的理论，一个高学历者所学知识是否有用并不重要，重要的是他有能力低成本(不费力)地掌握这种知识，其学位证书的作用是传送这种"有用"信息。会证平面几何问题也具有这样的功能，它传递了一种具有理科学习能力与倾向的学生的一种独特信息，这也就是在IMO试题中固定的必有一道平面几何问题的原因之一。

对于热衷于平面几何图书的出版，我们的另一个原因是因为从传统上讲如丘成桐先生所说：中国人缺乏希腊人对大自然界强烈的好奇心，欧几里得《几何原本》的伟大精神从来没有在中国生根.《几何原本》用简单的公理推导复杂的几何现象，对二千年来科学的发展有极大的影响，牛顿《原理》的写法就深受《几何原本》的影响，希腊人很早就用数学方法来探索大自然的奥妙，例如已经量度地球的直径等。中国人以为数学的重要性只是解决日常生活的问题，又特别重视传统，父传子，师传徒，不敢离经叛道。刘徽虽然本身有大成就，却只敢说是注释九章而不敢著书立说，道统的继承重于创新革命，求真的精神被覆盖……

当论及现代中国数学现状时，丘成桐说："我认识不少当代数学伟人，当他们面对一个很有意义的数学问题时，认为人生的精意无过于此，一切荣华富贵都比不上解决这个问题来得重要，大家争先揭发自然奥秘的面纱。成就大事业，需要无比的毅力，经得起不断的失败，在解决大问题以前，有如天风海雨迫人，兴奋得不得了，就是这种动力使无数的数学家继往开来。屈原说：'路漫漫兮修远，吾将上下而求索。'王国维说李后主词有赤子之心，一个伟大的数学家在解决重要问题时也是这样。庄子说：'天地与我并生，万物与我为一。'其实就是数学家面对大问题的的态度。现在中国数学家缺乏这种赤子之心，而宁愿全面学习西方数学界剩下的题目，盲目和自大成了今日中国数学界的通病。"

至于我们没有将世界各国所流行的平面几何著作中的习题都加以收录，是出于如此考虑，俗话说：

浴不必江海，要之去垢；马不必骐骥，要之善走。

仿此，书不必大全，要之有用；题不必如海，要之全新。

解释了具体书名的含义后，我们想谈一点对几何学教育价值的一般思考，英国科学家兰斯洛特·霍格本指出：

"从历史上看，希腊城邦的有闲阶级把几何学作为消遣的玩物，就像今天的人们把纵横填字游戏和下棋作为消遣的玩物一样。柏拉图告诉我们，几何学是人类可用以消遣的最高级的运动方式，所以几何学是作为人文科学学识的一部分而被包括进欧洲教育中的，它和现代的德雷克(1540—1596，英国航海家)的'被包围的世界'进行测量这一实践没有任何清晰的联系。那些讲授欧几里得几何学的人不了解其社会用途，好几代学习几何学的学生都不曾被告知，更后来的几何学——它是从亚历山大市繁忙的生活中发展出来的——是怎样使测量世界的大小成为可能的。这些测量粉碎了供奉星宿神

像的、异教徒的万神殿，并为伟大的航海事业清晰地指出了航线。”

在那篇著名的《数学——文明的镜子》一文中，霍格本怀着一名社会改革者的热情，从事挽救数学使之不致成为僧侣之方术的工作。

今天我们同样有必要做出努力使几何学不致沦为应试教育机械化选拔人才的劣等工具。

德国著名哲学家雅斯贝尔斯(Karl Jaspers，1883—1969)在其《什么是教育》(《Was ist Erziehung?》)一书中指出：

“教育是极其严肃的伟大事业，通过培养不断地将新的一代带入人类优秀文化精神之中，让他们在完整的精神中生活、工作和交往……对终极价值和绝对真理的虔敬是一切教育的本质，缺少对“绝对”的热情，人就不能生存，或者说人就活得不像一个人，一切就变得没有意义。”

反观教育中精神价值失落的残酷现实，他认为“创建学校的目的，是将历史上人类的精神内涵转化为当下生机勃勃的精神，并通过这一精神引导所有学生掌握知识和技术……什么地方计划和知识独行武断，对精神价值大张挞伐，那么这些计划和知识就必然变成自身目的，教育就将变成训练机器人，而人也变成单功能的计算之人，在仅仅维持生命力的状况中人可能会萎缩而无法看见超越之境。”

雅斯贝斯还说：“所谓教育，不过是人对人的主体间灵肉交流活动(尤其是老一代对年轻一代)，包括知识内容的传授、生命内涵的领悟、意志行为的规范，并通过文化传递功能，将人文遗产教给年轻一代，使他们自由地生成，并启迪其自由天性。因此教育的原则，是通过现存世界的全部文化导向人的灵魂觉醒之本源和根基，而不是导向由原初派生出来的东西和平庸的知识。真正的教育绝不容许死记硬背，也从不奢望每个人都成为有真知灼见、深谋远虑的思想家……教育活动关注的是，人的潜力是如何最大限度地调动起来并加以实现，以及人的内部灵性与可能性充分生成。换言之，教育是人的灵魂的教育，而非理智知识和认识的堆集。通过教育使具有天资的人，自己选择决定成为什么样的人以及自己把握安身立命之根。谁要是把自己单纯地局限于学习和认知上，即便他的学习能力非常强，那他的灵魂也是匮乏而不健全的……在学习中，只有被灵魂所接受的东西才会成为精神瑰宝，而其他含混晦暗的东西则根本不能进入灵魂中而被理解。”

几何学正是符合这些条件的最佳教育素材。正如徐光启对欧几里得《几何原本》的赞赏一样，他认为此书有“四不必”，即“不必疑，不必揣，不必试，不必改”；有四不可得，即“欲脱之不可得，欲驳之不可得，欲减之不可得，欲前后更置之不可得”；有“三至三能”，即“似至晦实至明，似至繁实至简，似至难实至易”。

晚清以降，平面几何的教育价值逐渐为国人所识，近年数学教育大讲实用，遂有所式微。本书的出版如能对平面几何的振兴有点滴作用，幸莫大焉。

最后向这些试题的提出者、解答者、翻译者表示衷心感谢。

刘培杰

2007.3